Тема научно-исследовательского проекта

ГЕОМЕТРИЯ НА КЛЕТЧАТОЙ БУМАГЕ ИЛИ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ $\mathbb{Z}^2$ РЕШЕТКИ ПРИ РЕШЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Цыркаева Виктория Алексеевна
учащаяся 7 А класса
Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение Гимназия № 1 имени Героя Советского Союза Н.Т. Антошкина городского округа город Кумертау Республики Башкортостан

Научный руководитель:
Мартынов Леонид Евгеньевич
учитель высшей категории
Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение Гимназия № 1 имени Героя Советского Союза Н.Т. Антошкина городского округа город Кумертау Республики Башкортостан

г. Кумертау

2026 год

Содержание

Введение

Уже в школьных учебниках 5-6 (и младших) классов встречаются отдельные понятия из курса геометрии. При этом предполагается их изучение в ознакомительном плане, без строгих доказательств. Очень часто при этом используются задачи на клетчатой бумаге, т.к. большинство из них можно решить без сложных построений и измерений. В то же время такие задачи не только помогают освоить геометрический материал, но и помогают развить творческие способностей учащихся [5].

С другой стороны, геометрические задачи на клетчатой бумаге включены в задание первой части ОГЭ по математики. Это сделано потому, что они позволяют быстро проверить, действительно ли ученик овладел необходимыми умениями [8, 9].

С третьей стороны, клетчатая бумага – это частный случай важного математического понятия «решетка точек», который в различных научных исследованиях выступает как инструмент, позволяющий решать задачи алгебры и теории чисел средствами геометрии, и наоборот, геометрические задачи – арифметическими и аналитическими. В работах [1, 2] даны теоретические сведения и подборки задач не только для средних школ, специализирующихся в математической подготовке, но и для высших учебных заведений.

Все вышесказанное делает актуальной работу по систематизации и адаптации подобного материала для 6-го класса.

Цель проекта: разработать систему справочного и задачного материала, связанного с решением геометрических задач на клетчатой бумаге, для курса занятий школьного математического кружка в 6-ом классе.

Для достижения этой цели поставлены следующие задачи:

1. учебные задачи:

1.1. изучить базовые понятия, применяемые в геометрии на клетчатой бумаге;

1.2. изучить формулы для нахождений площадей различных многоугольников;

1.3. изучить специфические методы нахождения площади на клетчатой бумаге;

2. проектные задачи:

2.1. подобрать/придумать упражнения на отработку указанных понятий и методов;

2.2. отобрать из имеющейся литературы задачи олимпиадного типа, где используются указанные понятия и методы;

2.3. провести апробацию материала на занятиях в математическом кружке и на уроках математики;

2.4. оформить теоретический и задачный материал в виде учебного пособия.

В процессе подготовки проекта мы обнаружили задачу [6, стр. 16, задача 6], которая по мнению автора статьи, преподавателя СУНЦ МГУ – Школа им. А.Н. Колмогорова, Нурлигареева Х.Д. «является наиболее показательной в методическом плане. Будучи сформулированной в совершенно независимых от понятия решётки терминах, она, тем не менее, может быть решена при помощи формулы Пика. Для того, чтобы ясно себе это представить, достаточно разбить исходный квадрат на 144 одинаковых квадратика и заметить, что все точки пересечения рассматриваемых в условии отрезков будут лежать в вершинах этих квадратиков». В изученной нами литературе подобных задач больше не встречалось, все задачи так или иначе изначально были связаны с решеткой. Мы задались вопросом: как много задач, где можно использовать целочисленные решетки для решения?

Другими словами, можно ли говорить о некотором «методе наложения целочисленной решетки» при решении геометрических задач? Так возникла ...

3. Исследовательская задача:

3.1. исследовать задачный материал из различных источников, на возможность их решения путем наложения подходящей целочисленной решетки.

Результат выполнения этой задачи, мы представляем как основной результат всей работы.

Работа состоит из трех параграфов. Материал первых двух параграфов, с одной стороны, содержит необходимые сведения для применения целочисленных решеток при решении задач, с другой стороны, дает некоторое представление о содержании будущего пособия.

В первом параграфе разбираются основные положения геометрии на клетчатой бумаге: как определяются точки, отрезки и прямые; вводятся понятия смещений и углового коэффициента прямой; признаки параллельности и перпендикулярности прямых на основе угловых коэффициентов.

Второй параграф посвящен многоугольникам на клетчатой бумаге, способам вычисления их площадей.

В третьем параграфе разобраны задачи и решения, которые изначально формулируются без использования клетчатой бумаги, и демонстрируют использование целочисленной решетки как самостоятельный метод решения геометрических задач.

§ 1. Общие положения: точки, прямые и отрезки на клетчатой бумаге

Когда мы говорим о геометрии на клетчатой бумаге, мы предполагаем наличие некоторой математической структуры, которая с одной стороны дает ряд ограничений на условия задачи, а с другой стороны, в неявном виде задает дополнительные условия. В этом параграфе мы рассмотрим эту структуру, и некоторые термины, связанные с ней.

Ортогональная целочисленная решетка $\mathbb{Z}^2$. Рассмотрим на плоскости два семейства параллельных прямых, разбивающих плоскость на равные квадраты. Сторону квадрата будем считать равной 1. Из вышесказанного ясно, что прямые из разных семейств взаимно перпендикулярны. Для удобства будем считать, что одно семейство расположено горизонтально, а второе вертикально. Множество всех точек пересечения этих прямых называется ортогональной целочисленной решеткой (обозначается $\mathbb{Z}^2$), сами точки – узлами решетки. Важно иметь в виду, что решетка состоит из узлов, а сами прямые к ней не относятся. Способы построения решеток более общего вида рассмотрены в [1].

В дальнейшем мы предполагаем, что заданные точки – это узлы решетки, заданный отрезок имеет концы в узлах, заданная прямая проходит как минимум через два узла. Конечно, на плоскости могут возникать точки, отрезки и прямые, не обладающие такими свойствами, в этом случае мы будем считать их «неопределенными». В условиях задач предполагается отсутствие «неопределенных» геометрических объектов.

Смещения. Ориентация. Пусть даны две точки. Кратчайший путь из одной в другую – это отрезок с концами в этих точках, но переместится из одной в другую можно и по линиям, образующим решетку (для определенности, сначала по горизонтали, затем по вертикали). Длины горизонтального и вертикального отрезков при таком перемещении будут выражаться натуральным числом – количеством клеток, назовем их горизонтальным и вертикальным смещениями, обозначать их будем в скобках $(\text{г}, \text{в})$.

Очевидно, что одному смещению $(\text{г}, \text{в})$ при указанной начальной точке будут соответствовать 4 конечных. Чтобы избежать такой неоднозначности введем на плоскости ориентацию: горизонтальное смещение будем считать положительным, если перемещение происходит вправо, и отрицательным, если влево; вертикальное смещение будем считать положительным, если перемещение происходит вверх, и отрицательным, если вниз (рис. 1). Равенство нулю одного из смещений говорит о том, что точки лежат на линиях, образующих решетку. Таким образом, при введенной ориентации, смещения – целые числа.

Угловой коэффициент прямой. Прямые на решетке обладают важным свойством: если прямая проходит через два узла, то она содержит бесконечно много узлов решетки, причем расстояния между соседними узлами этой прямой равны между собой.

Угловым коэффициентом k прямой отличной от вертикальной линии, назовем отношение вертикального и горизонтального смещения между двумя ее точками, т. е. $k = \frac{\text{в}}{\text{г}}$. Угловой коэффициент не зависит от выбора пары точек, выбранных для его определения. Причем, если дробь, выражающая угловой коэффициент по некоторым двум точкам A и B сократима, и число m – НОД$(\text{г}, \text{в})$, то внутри отрезка AB содержится ровно $m - 1$ точка. Если дробь несократима, то ее числитель и знаменатель задают смещения между соседними точками (рис. 2). Это свойство углового коэффициента часто используется в задачах.

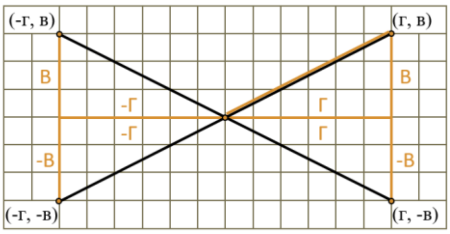


Рисунок 1. Смещения точек

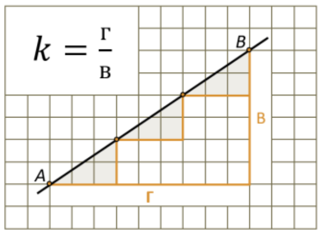


Рисунок 2. Угловой коэффициент

Чем больше угловой коэффициент прямой, тем больше угол между горизонтальной линией и этой прямой. Прямые с противоположным угловым коэффициентом симметричны относительно горизонтальной и вертикальной линий, проходящих через точку их пересечения.

Перпендикулярные и параллельные прямые. Как установить параллельность или перпендикулярность прямых отличных от линий сетки? Две прямые параллельны тогда и только тогда, когда их угловые коэффициенты равны. Две прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда произведение их угловых коэффициентов равно –1. Эти утверждения можно доказать, рассмотрев соответствующие прямоугольные треугольники (рис. 3)

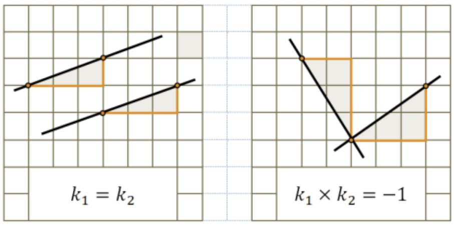


Рисунок 3. параллельность и перпендикулярность прямых

Длина отрезка. Пусть задан некоторый отрезок AB и требуется найти его длину. Если отрезок лежит на линиях, образующих решетку, то его длина находится простым подсчетом единичных отрезков (сторон клеток). В противном случае, нужно найти смещения $(г, в)$ от одного конца отрезка до другого. Заданный отрезок и отрезки задающие смещения образуют прямоугольный треугольник, поэтому можно применить теорему Пифагора – квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов ($AB^2 = г^2 + в^2$). Таким образом, длина отрезка AB вычисляется по формуле $AB = \sqrt{г^2 + в^2}$.

§ 2. Многоугольники, вычисление площадей

В этом параграфе мы рассмотрим методы нахождения площади многоугольников, все вершины которых расположены в узлах решетки. Отметим, что разместить таким способом можно далеко не всякий многоугольник, например, правильный треугольник, пятиугольник или шестиугольник так разместить невозможно [1, 3].

Подсчет клеток. Если все стороны многоугольника расположены по линиям решетки, то его площадь можно найти, просто сосчитав количество клеток, на которые он разбит (рис. 4а). В некоторых случаях таким способом удается найти площадь учитывая половинки клеток (рис. б). Второй пример – это, по существу, простейший случай метода разбиения, который будет разобран ниже.

Метод разбиения. Суть этого метода состоит в том, чтобы разбить многоугольник на фигуры, площади которых вычисляются легко – прямоугольники и прямоугольные треугольники, стороны или катеты которых расположены по линиям решетки. На клетчатой бумаге формула для площади такого прямоугольника ($S = ab$, a и b – стороны) доказывается непосредственным подсчетом клеток, а прямоугольный треугольник представляется как половина прямоугольника ($S = \frac{1}{2}ab$, a и b – катеты). На рисунке 5 представлен пример разбиения фигуры на прямоугольники и прямоугольные треугольники.

Метод дополнения. Иногда вместо разбиения удобно дополнить (вписать) фигуру в прямоугольник, а затем найти его площадь и вычесть площади «лишних» частей. Пример приведен на рисунке 6.

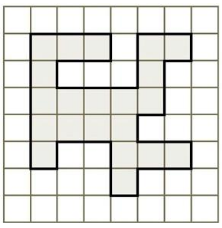
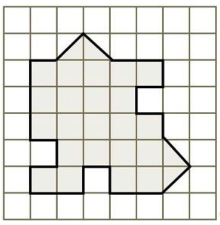
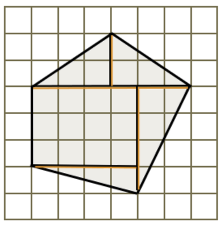
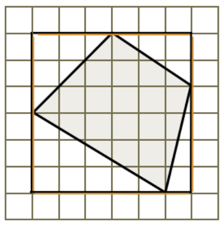

а)

б)



Рисунок 4. Подсчет клеток **Рисунок 5. Разбиение.** **Рисунок 6. Дополнение**

Вычисления по формулам. Используя методы разбиения и дополнения (по отдельности или совместно), можно доказать формулы для нахождения площади различных многоугольников. В доказательствах не учитывается, что фигуры размещены на решетке, однако на практике именно клетки помогают легко вычислить длины нужных отрезков (сторон, высот. диагоналей) и знание формул позволяет сократить время. На рисунке 7 приведены примеры многоугольников и формулы площадей, необходимые для вычисления отрезки выделены цветом.

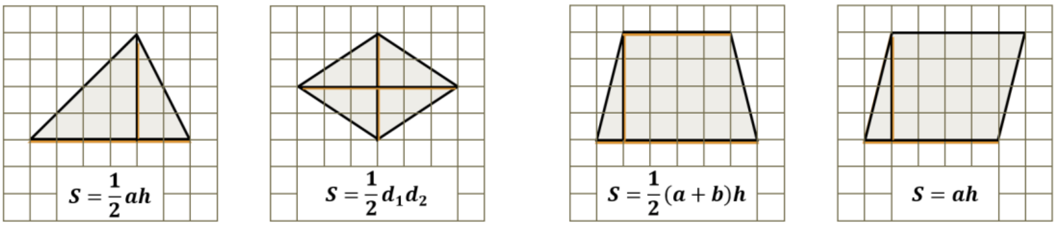


Рисунок 7. Вычисление площади многоугольников по формулам

Площадь через смещения. Если стороны параллелограмма не проходят по линиям решетки, то эффективным способом нахождения его площади будет формула через смещения. Выберем одну из вершин параллелограмма, а затем найдем смещения до соседних с ней вершин (рис. 8а). Пусть $г_1$ и $в_1$ смещения до одной из них, а $г_2$ и $в_2$ – до второй, тогда площадь параллелограмма находится по формуле $S = |г_1 в_2 - г_2 в_1|$. Произвольный треугольник можно достроить до параллелограмма (рис. 8б), причем площадь треугольника будет равна половине площади параллелограмма, т.е. $S = \frac{1}{2} \cdot |г_1 в_2 - г_2 в_1|$.

Для запоминания формулы удобно использовать мнемоническое правило (рис. 8в): записать смещения в виде квадратной таблицы, затем перемножить числа, стоящие на диагоналях и соединенные линией, причем одну взять со знаком «+», а другую со знаком «–».

Доказательство приведенной формулы в общем случае, когда смещения могут быть как положительными, так и отрицательными, довольно трудоемко. На рисунке 8г представлена схема доказательства в случае, когда все смещения положительны. Если найти площадь большого прямоугольника, а затем вычесть площади прямоугольных треугольников и маленьких прямоугольников, то получится нужная разность.

С помощью этого метода можно вычислить площадь любого многоугольника. Для этого (рис. 9а): пронумеруем вершины многоугольника начиная с произвольной и совершая обход против часовой стрелки; возьмем внутри многоугольника произвольную точку; вычислим смещения от нее до вершин и перепишем их в столбик, повторив первую еще раз снизу; вычислим произведения чисел соединенных линиями, и просуммируем их, взяв с соответствующим знаком (рис. 9б); разделим полученную сумму на 2. Благодаря характерному рисунку, этот метод получил название «шнуровка Гаусса». (Карл Гаусс, 1777–1855, – немецкий математик, механик, физик, астроном и геодезист, считается одним из величайших математиков всех времен, «королем математиков»)

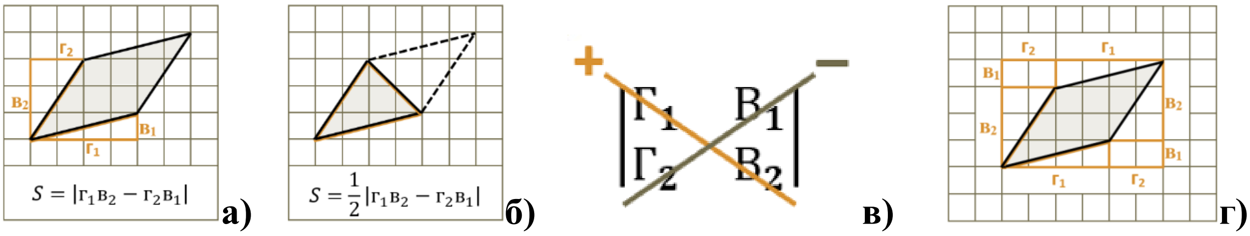
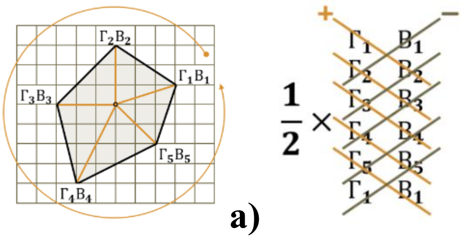


Рисунок 8. вычисление площади параллелограмма и треугольника через смещения

Формула Пика. Другим универсальным, и в тоже время простым методом нахождения площади многоугольников на клетчатой бумаги является формула Пика $S = \text{Вн} + \frac{\text{Гр}}{2} - 1$, где Вн – количество целочисленных точек внутри многоугольника, а Гр – целочисленных точек на границе многоугольника. Эта формула названа в честь австрийского математика Георга Пика, доказавшему ее справедливость в 1899 году. На рисунке 10 приведены примеры многогранников и указаны их площади, вычисленные по формуле Пика.



а) б)

Рисунок 9. Шнуровка Гаусса

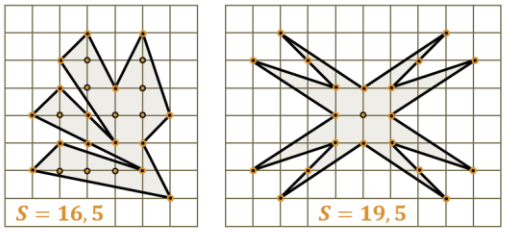


Рисунок 10. Формула Пика.

Важным следствием из этой формулы является тот факт, что удвоенная площадь многоугольника на клетчатой бумаге выражается натуральным числом.

§ 3. Примеры задач, решаемых наложением $\mathbb{Z}^2$ решетки

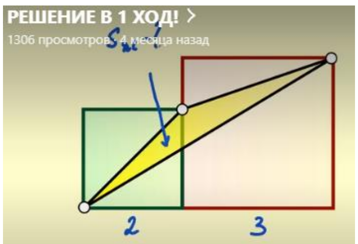
В этом параграфе мы рассмотрим примеры задач, условия которых формулируются без применения терминологии клетчатой бумаги, однако наложение подходящей целочисленной решетки значительно упрощает их решение. Здесь мы можем привести лишь небольшую часть задач из нашей подборки. Мы решили ограничится задачами, взятыми с канала «Наглядная геометрия» Валерия Казакова (https://dzen.ru/geometry), после каждой задачи приведена ссылка, чтобы можно было посмотреть решение задачи которое предлагает автор канала и его обсуждение в комментариях.

Задача 1. (https://dzen.ru/video/watch/670672a1badccb6169559909)

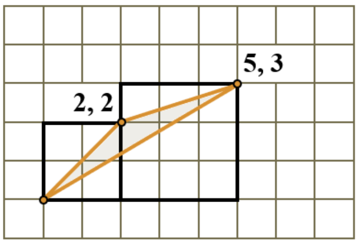
Даны два квадрата со сторонами 2 и 3 см, найти площадь треугольника ACK (рис. 11а).

Решение. Рассмотрим квадраты на $\mathbb{Z}^2$ решетке линии которой идут по сторонам квадратов, а сторона клетки 1 см (рис. 11б). Смещения точек K и C от точки A равны – (5,3) и (2,2). Вычислим площадь треугольника через смещения, и $S = \frac{1}{2}|5 \times 2 - 2 \times 3| = 2$.

Ответ: $S = 2$ см^2.



а)



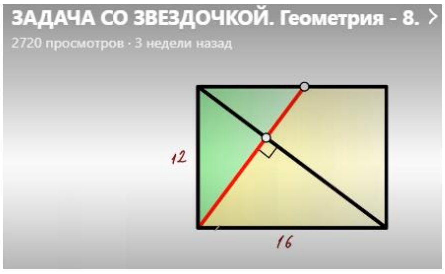
б)

Рисунок 11. Задача 1 и ее решение с помощью решетки.

Задача 2. (https://dzen.ru/video/watch/678b4d35aecd66706b307b31)

Дан прямоугольник со сторонами 12 и 16 см. Прямая, выходящая из его вершины перпендикулярно к диагонали, разбивает его на прямоугольный треугольник и трапецию. Найти площадь трапеции (рис. 12а).

Решение. Рассмотрим прямоугольник на $\mathbb{Z}^2$ решетке (рис. 12б), где стороны 12 и 16 клеток. Диагональ имеет угловой коэффициент $k_1 = \frac{-12}{16} = -\frac{3}{4}$, тогда ей перпендикулярная прямая будет иметь угловой коэффициент $k_2 = \frac{4}{3}$, т.е. точки решетки будут повторяться через каждые 4 клетки по вертикали и каждые 3 клетки по горизонтали.



а)

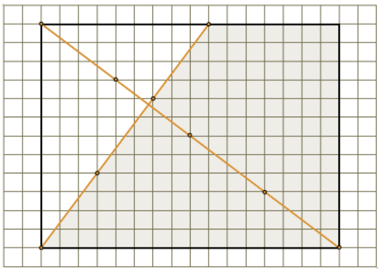

б)

Рисунок 12. Задача 2 и ее решение с помощью решетки.

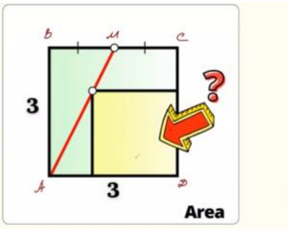
Таким образом, пока она «пройдет» 12 клеток вверх до стороны параллелограмма, она сместится на 9 клеток вправо, а значит катеты прямоугольного треугольника 12 и 9 см. Площадь трапеции найдем как разность площади прямоугольника и прямоугольного треугольника $S = 12 \times 16 - \frac{1}{2} \times 12 \times 9 = 192 - 54 = 138$. Ответ: $S = 138$ см^2.

Задача 3. (https://dzen.ru/video/watch/67824521881e6458cc1b8778)

Дан квадрат *ABCD* со стороной 3 см, точка *M* – середина стороны *BC*. И построен ещё один квадрат как показано на рисунке 13а. Найти площадь маленького квадрата.

Решение. Возьмем решетку со стороной клетки равной 0,5 см, т.е. в стороне квадрата 6 клеток (рис. 13.б). Угловой коэффициент прямой *AM* равен 2, поэтому точка со смещением (2,4) от точки *A* – это вершина маленького квадрата, тогда его сторона будет 4 стороны клетки или 2 см.

Ответ: $S = 4$ см^2.



а)

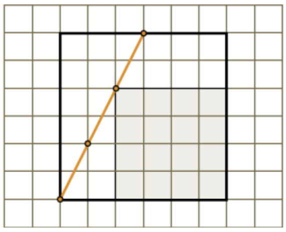

б)

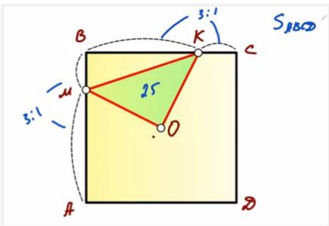
Рисунок 13. Задача 3 и ее решение с помощью решетки.

Задача 4. (https://dzen.ru/video/watch/66eef45ea73cff7e5cd5e1e3)

Дан квадрат *ABCD,* точка *O* – центр квадрата. На сторонах *AB* и *BC* взяты точки *M* и *K* такие, что *AM* : *MB*=3:1, *BK* : *KC*=3:1. Найти площадь квадрата, если известно, что площадь треугольника *OMK* равна 5 см^2 (рис. 14а).

Решение. Рассмотрим $\mathbb{Z}^2$ решетку такую, что сторона квадрата равна 4 стороны клетки (рис. 14б). Тогда площадь треугольника (ее можно вычислить по формуле Пика) будет равна 2,5 клетки, а значить площадь одной клетки равна 2 см^2, а площадь всего квадрата – 16 клеток или 32 см^2.

Ответ: $S = 32$ см^2.



а)

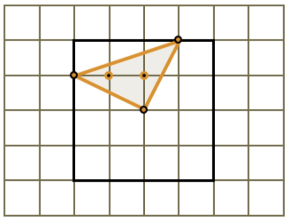
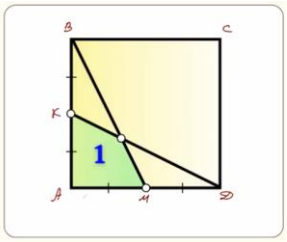

б)

Рисунок 14. Задача 4 и ее решение с помощью решетки.

Задача 5. (https://dzen.ru/video/watch/671df1b6499280128a18c6dc)

Дан квадрат *ABCD,* точки *K* и *M* – середины сторон *AB* и *DA,* прямые *BM* и *DK* пересекаются в точке *F.* Найти площадь квадрата, если известно, что площадь четырехугольника *AKFM* равна 1 см^2 (рис. 15. а).

Решение. Чтобы все вершины четырехугольника *AKFM* были в узлах решетки возьмем сторону квадрата 6 сторон клеток. По формуле Пика площадь четырехугольника *AKFM* равна 6, а площадь квадрата 36 клеткам, т.е. в 6 раз больше (рис. 15б). Ответ: $S = 6$ см^2.



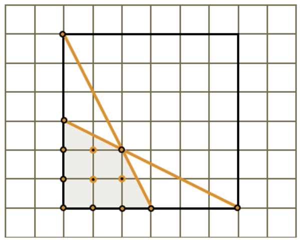
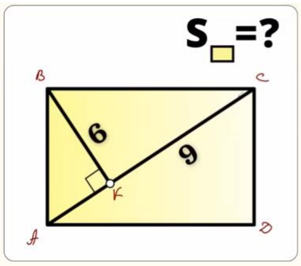
а)

б)

Рисунок 15. Задача 5 и ее решение с помощью решетки.

Задача 6. (https://dzen.ru/video/watch/6785f41b49dbc957f7024b5e)
Дан прямоугольник *ABCD,* точки *BK* – перпендикуляр, опущенный из вершины *B* на диагональ *AC*, *BK*=3 см, *KC*=9 см. Найти площадь прямоугольника (рис. 16а).

Решение. Расположим $\mathbb{Z}^2$ решетку так, чтобы отрезки *BK* и *KC* лежали на ее линиях, сторону клетки примем равной 1 см. Прямая *BC* имеет угловой коэффициент $k_1 = \frac{-6}{9} = -\frac{2}{3}$, тогда ей перпендикулярная прямая *AB* будет иметь угловой коэффициент $k_2 = \frac{3}{2}$, т.е. вертикальному смещению (от точки *B*) на 6 клеток вниз будет соответствовать горизонтальное на 4 клетки влево (в точку *A*).



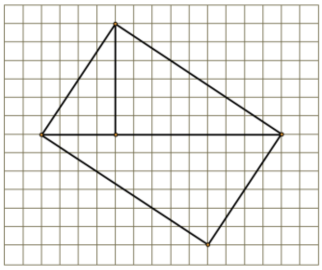
а)

б)

Рисунок 16. Задача 6 и ее решение с помощью решетки.

Таким образом отрезок *KA* будет равен 4 см. Теперь можно найти площадь треугольника *ABC*, и прямоугольника $S = 2 \times \left(\frac{1}{2} \times BK \times AC\right) = 6 \times 13 =$ 78 см^2. Ответ: $S = 78$ см^2.

Заключение

Подводя итог, отметим, что задачи 1 и 2 проекта выполнены полностью. Что касается задачи 3, то задачного материала уже хватит на небольшой курс из 10-15 занятий, но подбор задачного материала продолжается, он систематизируется, задачи объединяются в серии по схожим условиям и по разнообразию нюансов в решениях.

Теоретический и задачный материал прошел апробацию в конце января – начале февраля 2025 года на занятиях школьного математического кружка в 6-ых классах. После коротких сообщений учащиеся решали упражнения на закрепление отдельных понятий, формул и методов. Два занятия целиком были посвящены решению задач с применением наложения целочисленной решетки. Также автор выступила с докладами на уроках геометрии в 8-ых классах (рис. 17) и на курсах подготовки к ОГЭ в 9-ых классах, где было рассказано о методах нахождения площади многоугольников на клетчатой бумаге. Особый акцент в докладах делался на универсальные методы – шнуровка Гаусса и формула Пика.

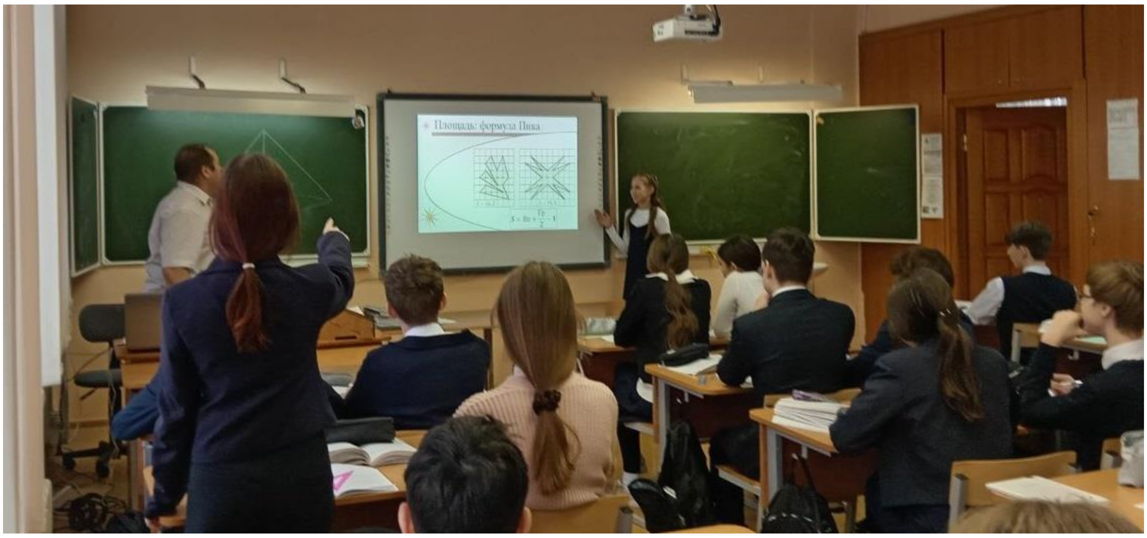


Рисунок 17. Выступление с докладом на уроке геометрии в 8В классе

Хотя мы нашли не так много задач, которые сформулированы не в терминах решеток, но решаются с их применением, тем не менее считаем, что уже можно говорить о самостоятельном методе решения геометрических задач – методе наложения целочисленной решетки.

Этот метод обладает рядом достоинств:

1) не требует большого объема геометрических знаний и потому доступен в 6-ом классе;

2) связь с понятиями из теории чисел – делимость, положительные/отрицательные числа, которые изучаются в 6-ом классе;

3) связь с понятиями ортогональная система координат, перпендикулярные/параллельные прямые, также изучаемыми в 6-ом классе.

Список литературы

1. Вавилов В.В., Устинов А.В. Задачи на клетчатой бумаге (окончание) // Математическое образование. – 2007. – № 2(42). – С. 33-57.
2. Вавилов В.В., Устинов А.В. Задачи на клетчатой бумаге // Математическое образование. – 2006. – № 4(39). – С. 47-67.
3. Васильев Н.Б. Вокруг формулы Пика // Научно-популярный физико-математический журнал «Квант». – 1974. – № 12 – С. 39-43
4. Гаркавенко Г.В., Звягинцев Д.А. Решение одной олимпиадной задачи по математике и формула Пика // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования. – 2016. – № 5-2. – С. 46-47.
5. Келдибекова А. О. Решение заданий на клетчатой бумаге как средство развития творческих способностей учащихся школ // Вестник Кыргызско-Российского Славянского университета. – 2016. – Т. 16, № 5. – С. 41-44.
6. Нурлигареев Х.Д. Избранные главы дискретной геометрии в курсе математики специализированных школ // Ярославский педагогический вестник – 2010 – Т.3, №4. – С.12-17.
7. Нурлигареев Х.Д. Избранные главы дискретной геометрии на факультативных занятиях математикой в специализированных школах // Вестник Костромского государственного университета им. Н.А. Некрасова. – 2012. – Т. 18, № 3. – С. 134-137.
8. Смирнова И., Смирнов В. Геометрия на клетчатой бумаге. (Библиотечка «Первого сентября», серия «Математика». Вып. 27) – М.: Чистые пруды, 2009. – 32 с.
9. Темербекова А.А. Математическая подготовка школьников к ЕГЭ: методика определения площади плоской фигуры // Информация и образование: границы коммуникаций. – 2013. – № 5(13). – С. 352-355.