

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО
УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ» В Г. ГОРЛОВКА

Методическая разработка
открытого занятия
по учебной дисциплине ЕН.01 Математика
по теме «Решение задач с комплексными числами»
для специальности 23.02.07 Техническое обслуживание и ремонт двигателей,
систем и агрегатов автомобилей

Методическая разработка открытого занятия по теме «Решение задач с комплексными числами»

Подготовила: Брагина Елена Александровна, преподаватель отделения среднего профессионального образования «Автотранспортный колледж» АДИ ДонНТУ, специалист высшей категории

Методическая разработка на основании опыта работы показывает методику проведения практического занятия с использованием традиционных форм и методов обучения в сочетании с элементами инновационных форм и методов обучения

Для преподавателей учебной дисциплины ЕН.01 Математика

Рецензенты:

1. Баркова И.С., преподаватель отделения среднего профессионального образования «Автотранспортный колледж» АДИ ДонНТУ, специалист высшей категории
2. Мудрецкая Е.В., преподаватель ГПБОУ «Горловский колледж промышленных технологий», специалист высшей категории

Рассмотрено и одобрено на заседании
цикловой комиссии «Математические и
общетехнические дисциплины»

Протокол №1 от 28 августа 2024 года

Председатель комиссии _____ Е.А. Брагина

Содержание

Содержание	3
Введение	4
1. План занятия	5
2. Технологическая карта занятия	7
3. Содержание и ход занятия	10
Заключение	15
Литература	16
Приложения (по организации и реализации отдельных этапов занятия)	17
Приложение А	17
Приложение Б	21
Приложение В	43
Приложение Д	44
Приложение Е	46
Приложение Ж	47
Приложение З	49
Приложение И	50

Введение

Изучение дисциплины ЕН.01 Математика в учебном заведении СПО основывается на знаниях, умениях и навыках, полученных в основном курсе общеобразовательной математики, предусматривает расширение и углубление теоретических знаний по математике, приобретение практических умений и навыков решения простейших задач данной дисциплины и задач с профессиональным уклоном.

Практическое занятие по теме «Решение задач с комплексными числами» дает возможность показать усвоение студентами учебного материала занятия на основании базовых знаний основного курса общеобразовательной математики.

Практическое занятие организовано и проведено с использованием традиционных форм и методов в сочетании с инновационными.

Данное занятие построено с учетом взаимосвязи и последовательности структурных элементов занятия по принципу «от простого к сложному», который дает возможность сократить разрыв в уровне знаний «сильных» и «слабых» студентов, повысить уровень знаний «слабых».

Для оптимального использования времени, для активизации познавательной деятельности студентов и для реализации идеи конструктивизма во время занятия делается акцент на возможность моделирования условий задач и моделирования алгоритмов решения задач.

Использование разнообразных заданий, методов научного познания, моделирование условий и алгоритмов задач способствует подготовке студентов к сложным мыслительным процессам, создает основу для использования разнообразных форм и методов обучения.

Используя методические принципы для развития профессионально-личностных качеств студентов, традиционные и инновационные педагогические технологии, я старалась сделать занятие интересным, динамичным и результативным.

.

1. План занятия

Дисциплина:	ЕН.01 Математика
Преподаватель:	Брагина Елена Александровна
Тема занятия:	Решение задач с комплексными числами
Продолжительность занятия:	80 минут
Вид занятия:	практическое
Тип занятия:	практическое занятие на применение знаний и умений
Формы и методы проведения занятия:	разнообразные традиционные и нетрадиционные словесные, наглядные и практические методы и формы
Методическая цель:	совершенствовать методику проведения практических занятий с использованием разнообразных традиционных и инновационных форм и методов
Дидактическая цель:	формировать навыки решения типичных и нестандартных задач с применением изучаемого теоретического материала
Воспитательная цель:	воспитывать чувство ответственности за порученное дело, исполнительности, аккуратности, добросовестности, чувства долга
Материально-техническое обеспечение:	калькуляторы (по необходимости)
Межпредметные связи:	
дисциплины, которые обеспечивают:	ОДП.01 Математика
дисциплины, которые обеспечиваются:	ОП.03 Электротехника и электроника, ОП.02 Техническая механика
Литература основная:	Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть / Д.Т.Письменный.-5-е изд.-М:

Айрис-пресс, 2005.-288 с.

дополнительная:

Богомолов Н. В. Практические занятия по математике – М.: «Высшая школа» 1979 г., 448 с.

Пехлецкий И. Д. Математика, учебник – М.: изд. центр «Академия» «Мастерство», 2002 г., 304 с.

2. Технологическая карта занятия

№ п/п	Этапы занятия	Деятельность преподавателя	Деятельность студентов	Организа- ционные формы работы	Методы работы
1	2	3	4	5	6
1	Организационная часть занятия	Совершает групповой звонок в Сферум, приветствует студентов, отмечает отсутствующих, проверяет готовность студентов к проведению занятия, выполнение домашнего задания	Регистрируются в чате Сферум, сообщают о готовности к занятию	Фронтальная	Словесные (беседа)
2	Первоначальная мотивация учебной деятельности	Включает демонстрацию компьютерной презентации на экране и сообщает информацию, подготавливающую студентов к восприятию новой темы	Слушают	Фронтальная	Словесные (рассказ), наглядные (метод иллюстрации и демонстрации)
3	Сообщение темы, целей, заданий занятия, этапов занятия и критериев оценивания знаний, умений и навыков студентов по теме занятия	Словесное сообщение	Слушают	Фронтальная	Словесные (рассказ)
4	Проведение контроля теоретических	Устный фронтальный опрос по пройденному	Отвечают на вопросы	Фронтальная	Словесные (устный фронтальный)

	знаний, умений и навыков студентов по разделу "Элементы теории комплексных чисел"	материалу			опрос)
5	Проведение контроля теоретических знаний, умений и навыков студентов по разделу "Элементы теории комплексных чисел"	Решение и демонстрация кроссворда	Отвечают на вопросы кроссворда	Фронтальная	Словесные (устный фронтальный опрос)
6	Проведение контроля практических знаний, умений и навыков студентов по разделу "Элементы теории комплексных чисел"	Контроль над решением задач с элементами эвристической беседы	Решение задач	Индивидуальная	Практические (письменный индивидуальный и фронтальный опрос)
7	Подведение итогов проведения контроля знаний, умений и навыков студентов по разделу "Элементы теории комплексных чисел"	Словесное сообщение и постановка преподавателем общей проблемы практического занятия и обсуждение ее со студентами	Слушают	Фронтальная	Словесные (рассказ)
8	Мотивация решения задач с комплексными	Подготовка студентов к решению	Слушают	Фронтальная	Словесные (рассказ)

	числами	разнообразных задач с комплексными числами			
9	Решение задач практического занятия	Контроль над решением задач с элементами эвристической беседы	Решают и записывают в конспект	Фронтальная и индивидуальная	Практические (письменный индивидуальный и фронтальный опрос)
10	Самостоятельное применение знаний, умений и навыков студентов по данной теме	Выдача заданий самостоятельной работы по вариантам	Решают и записывают в конспект	Фронтальная	Практические (письменный индивидуальный и фронтальный опрос)
11	Итоговая часть занятия	Комментирует работу студентов на занятии	Слушают	Фронтальная	Словесные (рассказ)
12	Сообщение домашнего задания	Сообщает домашнее задание	Слушают, записывают домашнее задание	Фронтальная	Словесные (рассказ)

3. Содержание и ход занятия

3.1. Организационная часть.

Студенты заходят в чат «Группа 1СТМ Математика» и регистрируются с записью в чате «Ф.И.О. готов к занятию»

Преподаватель совершает групповой звонок в чате «Группа 1СТМ Математика»

3.1.1. Приветствие обучающихся:

Преподаватель: Здравствуйте, уважаемые студенты. Я рада вас видеть в дистанционном формате.

3.1.2. Отметка отсутствующих по данным регистрации студентов в чате.

Преподаватель:

На рабочих местах у вас должны быть ручки и конспекты, которые вы будете заполнять. Таким образом, я вижу, что вы готовы к занятию.

3.1.3. Организация внимания и внутренней готовности, психоэмоциональный настрой студентов.

Я рассчитываю на нашу совместную активную и продуктивную работу на занятии в дистанционном формате.

3.1.3. Проверка выполнения домашнего задания.

3.1.3.1. Преподаватель: какое домашнее задание вы получили на предыдущем занятии?

Ожидаемый ответ: необходимо было выучить конспект последней лекции (Приложение Б), повторить всю теорию комплексных чисел и представить комплексное число $6-6i$ в тригонометрической форме.

3.1.3.2. Преподаватель: какие вопросы возникали во время выполнения домашнего задания?

Ожидаемый ответ: вопросов не было.

3.1.3.3. Преподаватель: по какому алгоритму решали практическую часть домашнего задания?

Ожидаемый ответ:

1. Для заданного комплексного числа определили значения a , b и четверть, в которой находится точка, соответствующая числу.

2. Нашли модуль и аргумент для числа $6-6i$.

3. Представили комплексное число в тригонометрической форме, пользуясь стандартной формой $a+bi=r(\cos \varphi + i\sin \varphi)$.

3.1.3.4. Преподаватель: назовите полученный ответ.

Ожидаемый ответ: $6-6i = 6\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i\sin \frac{\pi}{4})$.

3.1.3.5. Подведение итогов проверки практической части домашнего задания.

3.1.3.5.1. Преподаватель: Домашнее задание, которое должно было способствовать повторению и закреплению практических умений и навыков выполнения заданий с комплексными числами, выполнено. Проверка домашнего задания показала, что мы можем продолжить формирование навыков решения типичных и нестандартных задач раздела "Элементы теории комплексных чисел".

3.2. Мотивация учебной деятельности.

3.2.1. Вступительное слово преподавателя.

3.2.1.1. Преподаватель: развитие учения о комплексных числах находит себе важнейшие применения в естествознании и технике, в частности - в учении о движении жидкостей и газов, в электротехнике и самолетостроении и т.д. Действия над комплексными числами связаны с важными действиями геометрического характера и имеют значительные и обширные приложения. Также с их помощью можно иногда с большей простотой получить такие результаты, относящиеся к действительным числам, которые без комплексных чисел получаются с большим трудом. Введение комплексных чисел, помимо своего чисто математического значения, представляет собой едва ли не самую яркую иллюстрацию диалектического развития математических понятий. Совокупность комбинаций вещественного и чисто мнимого чисел образует единое стройное целое – мир комплексных чисел, находящий себе наглядную иллюстрацию в цельном и законченном образе комплексной плоскости. Вряд ли можно подыскать другой пример, который с такой яркостью, наглядностью, логической простотой и вместе с такой исчерпывающей полнотой мог бы иллюстрировать диалектические законы развития математических понятий (Приложение А).

3.2.2. Сообщение темы, целей, заданий занятия.

3.2.2.1. Преподаватель: Сегодня мы имеем возможность продемонстрировать полученные знания и умения по разделу "Элементы теории комплексных чисел", развить практические умения и навыки решения разнообразных задач с помощью полученных теоретических знаний, выводов и формул, подготовиться к формированию алгоритмов решения нестандартных задач с использованием теории комплексных чисел.

3.2.3. Сообщение этапов занятия.

3.2.3.1. Преподаватель: Для этого нам необходимо определить уровень и глубину теоретических знаний и необходимых практических навыков во время устного фронтального опроса с использованием разнообразных проблемных вопросов и решения кроссворда, закрепить необходимые практические умения

и навыки решения стандартных задач с комплексными числами во время индивидуального опроса у доски, рассмотреть задачи, которые привели к возникновению и развитию комплексных чисел, закрепить полученные знания и умения во время индивидуального письменного выполнения заданий самостоятельной работы.

3.2.4. Критерии оценивания работы студентов на занятии.

3.2.4.1. Преподаватель: следует отметить, что высокие оценки за работу на занятии получают студенты, которые будут принимать активное участие во всех этапах занятия.

3.3. Проведение контроля знаний, умений и навыков студентов.

3.3.1. Обобщение и систематизация теории комплексных чисел. Устный фронтальный и индивидуальный опрос студентов.

3.3.1.1. Преподаватель: в начале занятия нам необходимо определить уровень теоретических знаний и осознать их глубину и прочность. Для этого вам нужно ответить на следующие вопросы (Приложение В):

Вопрос 1. Дайте определение комплексного числа.

Вопрос 2. Сколько форм может иметь комплексное число?

Вопрос 3. В какой форме комплексные числа целесообразно складывать, вычитать, умножать и делить?

Вопрос 4. В какой форме комплексные числа целесообразно возводить в степень и извлекать из под корня?

Вопрос 5. Назовите важные понятия для комплексного числа.

Вопрос 6. Какое из понятий определяется однозначно, а какое - нет?

Вопрос 7. Какое из комплексных чисел не имеет тригонометрической и показательной формы и почему?

Вопрос 8. Какое из известных вам числовых множеств является больше?

3.3.1.2. Преподаватель: для продолжения определения уровня теоретических знаний применим кроссворд, на вопросы которого вам необходимо ответить (Приложение Д).

3.3.2. Обобщение и систематизация умений и навыков работы с комплексными числами. Устный фронтальный и индивидуальный опрос учащихся с использованием проблемных вопросов.

3.3.2.1. Преподаватель: для решения заданий нашего занятия необходимо иметь минимальный уровень практических умений и навыков работы с комплексными числами, знать стандартные формулы и уметь их применять. Поэтому вам предлагается решить следующие задания, связанные с практическими умениями и навыками (Приложение Е).

Задание 1. Назовите значение действительной и мнимой части числа и четверть, в которой оно находится, для чисел: $-2+3i$, $-1-i$, $2-9i$, i , -2 .

Задание 2. Вычислите:

1) $(4 + 2i) + (1 + 5i)$.

2) $(3 + 5i) - (6 + 3i)$.

3) $2i \cdot 3i$.

4) i^{16} .

5) i^{25} .

6) $\frac{2}{3i}$.

3.3.3. Подведение итогов проведение контроля знаний, умений и навыков студентов. Рассказ преподавателя.

3.3.3.1. Преподаватель: благодаря вашей активности и старательности, а особенно студентов _____, мы подготовились к закреплению и расширению знаний, умений и навыков в разделе «Элементы теории комплексных чисел».

3.4. Решение задач практического занятия. Закрепление и расширение знаний, умений и навыков студентов в разделе "Элементы теории комплексных чисел".

3.4.1. Постановка преподавателем общей проблемы практического занятия и обсуждение ее со студентами. Рассказ преподавателя.

3.4.1.1. Преподаватель: в рамках темы практического занятия "Решение задач с комплексными числами" для закрепления полученных знаний, умений и навыков мы рассмотрим и решим несколько стандартных задач с использованием имеющихся формул, для расширения наших знаний детально рассмотрим и решим задачу, которая привела к возникновению и развитию комплексных чисел (Приложение А).

3.4.2. Решение задач практического занятия. Индивидуальный и фронтальный опрос студентов на закрепление практических умений и навыков в разделе "Элементы теории комплексных чисел". (Приложение Ж).

3.4.2.1. Преподаватель: для оптимизации решения задач используем результат решения домашнего задания, формулу Муавра и возведем в степень комплексное число: $[6 - 6i]^0$.

3.4.2.2. Преподаватель: продолжая закрепление в данной теме знаний, умений и навыков, извлечем из под корня комплексное число из домашнего задания: $\sqrt{6 - 6i}$.

3.4.3. Решение задач практического занятия. Демонстрация и пояснение преподавателем с привлечением студентов решенной задачи. (Приложение Ж).

3.4.3.1. Преподаватель: ну а теперь рассмотрим задачу, которая привела к появлению и развитию теории комплексных чисел: найдем корни квадратного

уравнения с отрицательным дискриминантом и по известным комплексным корням составим квадратное уравнение.

3.4.4. Подведение итогов решения задач практического занятия. Рассказ преподавателя.

3.4.4.1. Преподаватель: итак, мы осознали необходимость появления теории комплексных чисел и приобрели необходимые знания, умения и навыки для работы с комплексными числами. Следует отметить активное участие на занятии следующих студентов: _____.

3.5. Закрепление полученных знаний, умений и навыков для работы с комплексными числами. Самостоятельное применение студентами полученных знаний, умений и навыков.

3.5.1. Преподаватель: качество и глубину ваших знаний, умений и навыков можно проверить с использованием заданий самостоятельной работы (Приложение 3), к выполнению которой вы сейчас приступите. Для индивидуального выполнения заданий самостоятельной работы вам дается 15 минут, результаты выполнения этой работы будут подведены на следующем занятии, оценки выставлены в журнал.

3.6. Заключительный этап занятия. Рассказ преподавателя.

3.6.1. Вывод по целям, теме и задания занятия. Рассказ преподавателя.

3.6.1.1. Преподаватель: данное практическое занятие позволило систематизировать, обобщить, закрепить и расширить знания, умения и навыки студентов с очень важного математического понятия - комплексного числа.

3.6.2. Комментарии работы студентов на занятии. Выставление оценок. Рассказ преподавателя.

3.6.2.1. Преподаватель: благодарю всех студентов за активную и настойчивую работу во время занятия. Следует отметить студентов, которые показали во время занятия качественные знания, умения и навыки (назвать фамилии студентов и дать комментарии по поводу полученных оценок).

3.6.3. Выдача и комментарии домашнего задания. Рассказ преподавателя.

3.6.3.1. Преподаватель: дома вам необходимо изучить конспект занятия и решить следующие задачи (Приложение И).

Заключение

Цель, этапы и задания практического занятия по теме «Решение задач с комплексными числами» выполнены полностью, благодаря использованию традиционных форм и методов обучения в сочетании с элементами инновационных форм и методов обучения.

Сочетание традиционных педагогических технологий с элементами инновационных форм и методов обучения является эффективным и продуктивным, так как сохраняются ценные элементы традиционных технологий обучения, происходит преобразование инновации в традицию, а из традиции рождается новая инновация.

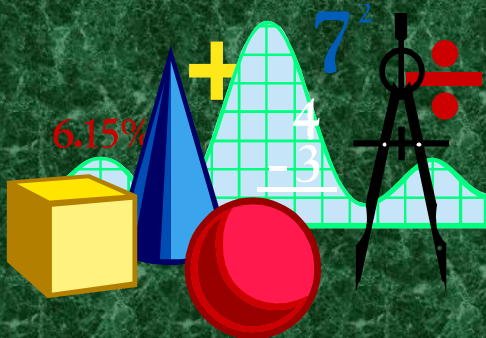
Решение задач по теме «Решение задач с комплексными числами» происходило по принципу «от простого к сложному», предложенные задания позволили обобщить, систематизировать и закрепить знания, умения и навыки по теории комплексных чисел, а решение квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом расширило знания студентов по теории чисел.

Литература

- основная: Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть / Д.Т.Письменный.-5-е изд.-М: Айрис-пресс, 2005.-288 с.
- дополнительная: Богомолов Н. В. Практические занятия по математике – М.: «Высшая школа» 1979 г., 448 с.
Пехлецкий И. Д. Математика, учебник – М.: изд. центр «Академия» «Мастерство», 2002 г., 304 с.

История возникновения комплексных чисел в слайдах

Комплексные числа



“Помимо и даже против воли того или другого математика, мнимые числа снова и снова появляются на выкладках, и лишь постепенно, по мере того как обнаруживается польза от их употребления, они получают более и более широкое распространение”

Ф. Клейн.

История возникновения комплексных чисел

Архимед



Натуральные числа

$10^{8 \cdot 10^{16}}$

Пифагор



«... Элементы чисел являются элементами всех вещей и весь мир в целом является гармонией и числом»

История возникновения комплексных чисел

2 век до н.э. $\xrightarrow{\text{Китайские математики}}$ *введение отрицательных чисел*

7 век до н.э.



$$x^2 = -9$$

История возникновения комплексных чисел

$$x^3 - 7x + 6 = 0$$

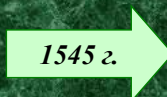


Нет действительных корней

Дж.Кардано



1545 г.



$$\begin{cases} x + y = 10 \\ xy = 40 \end{cases}$$



$$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{-15}$$

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a}$$



чисто отрицательные



История возникновения комплексных чисел

Большой вклад в развитие теории функций комплексного переменного внесли русские и советские ученые

М.В.Келдыш



М.А.Лаврентьев



аэродинамика
гидродинамика

В.С.Владимиров



Квантовая
теория
поля

Основные теоретические положения

Изучение действительных чисел показывает, что их недостаточно для решения алгебраических уравнений.

Например, Вы знаете, что уравнение $c_1x^2 + c_2x + c_3 = 0$ ($c_i \in R$ ($i=1,2,3$), $c_1 \neq 0$) при $D = c_2^2 - 4c_1c_3 < 0$ не имеет действительных корней.

Решение алгебраических уравнений второй, третьей, четвертой и т. д. степеней приводит к необходимости расширить множество действительных чисел так, чтобы простейшее из указанных выше уравнений $x^2 + 1 = 0$ имело решение.

Определение. *Комплексными числами* называются пары (a, b) действительных чисел a и b , если для них определены понятия равенства и операции сложения и умножения следующим образом:

1. Два комплексных числа (a_1, b_1) и (a_2, b_2) считаются *равными* тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.
2. *Суммой* двух комплексных чисел (a_1, b_1) и (a_2, b_2) называется комплексное число $(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$.
3. *Произведением* двух комплексных чисел (a_1, b_1) и (a_2, b_2) называется комплексное число $(a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$.

Для обозначения равенства, суммы, произведения и других операций над комплексными числами применяются те же знаки, что и для действительных чисел. Таким образом, по определению комплексного числа

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \text{ тогда и только тогда, когда } a_1 = a_2 \text{ и } b_1 = b_2; (1)$$

сумма и произведение двух комплексных чисел соответственно равны:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2), \quad (2)$$

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1). \quad (3)$$

Из формул (2), (3) вытекают, в частности, соотношения

$$(a_1, 0) + (a_2, 0) = (a_1 + a_2, 0), \quad (a_1, 0)(a_2, 0) = (a_1a_2, 0),$$

которые показывают, что операции над комплексными числами вида $(a, 0)$ совпадают с операциями над действительными числами a . Поэтому комплексные числа $(a, 0)$ отождествляются с действительными числами: $(a, 0) = a$.

Из всех комплексных чисел выделяют число $(0, 1)$, которое называют *мнимой единицей* и обозначают буквой i , т.е. $i = (0, 1)$. Вычислим по формуле (3) произведение $i \cdot i = i^2$. Имеем:

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Таким образом, получаем, что число i является корнем уравнения $x^2 + 1 = 0$.

Комплексные числа не являются числами в элементарном смысле этого слова, применяемыми при подсчетах и измерениях. Это математические объекты, определяемые свойствами, данными выше. Если множество комплексных чисел обозначить буквой C , то получим $R \subset C$.

В следующих главах займемся изучением комплексных чисел в разных формах и действиями над комплексными числами.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ФОРМА ЗАПИСИ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Из формул (2), (3) вытекают также равенства

$$(0, b) = (0, 1)(b, 0) = ib,$$

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + ib.$$

Поэтому, каждое комплексное число (a, b) можно представить в виде $a + ib$.

Определение. Запись комплексного числа в виде $a + ib$ называется *алгебраической формой* комплексного числа.

Число a называют действительной частью числа $z = a + ib$, число b – мнимой частью комплексного числа или коэффициентом при мнимой части комплексного числа $z = a + ib$ и записывают: $a = \operatorname{Re}(z)$ или $a = \operatorname{Re}(a + ib)$, $b = \operatorname{Im}(z)$ или $b = \operatorname{Im}(a + bi)$. Обозначения Re , Im произошли от французских слов “*reele*” – действительный и “*imaginaire*” – мнимый. Числа вида bi называются чисто мнимыми. Число $(0, 0)$ является одновременно действительным и чисто мнимым.

Пример. $2 + 3i$, $\sqrt{2} - 5i$ – комплексные числа, 2 и $\sqrt{2}$ – действительные части, 3 и -5 мнимые части.

ОПЕРАЦИИ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Рассмотрим сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел в алгебраической форме.

СЛОЖЕНИЕ, УМНОЖЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

С помощью алгебраической формы комплексного числа формулы (1)–(3) записываются так:

$$a_1 + b_1i = a_2 + b_2i \text{ тогда и только тогда, когда } a_1 = a_2 \text{ и } b_1 = b_2;$$

$$(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i; \quad (4)$$

$$(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1); \quad (5)$$

Операции сложения и умножения комплексных чисел обладают следующими свойствами:

1. Коммутативности (переместительное свойство):

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1 z_2 = z_2 z_1.$$

2. Ассоциативности (сочетательное свойство):

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \quad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3).$$

3. Дистрибутивности (распределительное свойство):

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

Докажем коммутативность сложения. Пусть $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$. Тогда по формуле (4) имеем

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$

$$z_2 + z_1 = (a_2 + a_1) + (b_2 + b_1)i.$$

Но по коммутативности действительных чисел $a_1 + a_2 = a_2 + a_1$ и $b_1 + b_2 = b_2 + b_1$. Следовательно, $z_1 + z_2 =$

$$z_2 + z_1.$$

Остальные свойства операций над комплексными числами проверяются аналогично.

Из свойств 1-3 вытекает, что операции сложения и умножения над комплексными числами обладают формально теми же свойствами, как если бы число i было действительным.

Числа нуль $(0,0)$ и единица $(1,0)$ в множестве комплексных чисел обладают теми же свойствами, что и в множестве действительных чисел. А именно, для любого комплексного числа z имеют место равенства:

$$z + 0 = 0, \quad z \cdot 1 = z.$$

Пример 1. Найти сумму чисел $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = -1 + 4i$.

Решение. $z_1 + z_2 = (2 - 3i) + (-1 + 4i) = (2 - 1) + (-3 + 4)i = 1 + i$.

Пример 2. Найти произведение z чисел $z_1 = 3 - 4i$ и $z_2 = 2 + 5i$.

Решение. Из условия имеем $a_1 = 3$, $b_1 = -4$, $a_2 = 2$, $b_2 = 5$.

Тогда $z = (3 \cdot 2 + 4 \cdot 5) + (3 \cdot 5 - 4 \cdot 2)i = 26 + 7i$.

ВЫЧИТАНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

В множестве комплексных чисел можно ввести операцию, обратную к операции сложения.

Определение. Разностью двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число z , сумма которого с числом z_2 равна числу z_1 .

Из определения следует, что если $z = z_1 - z_2$, то $z + z_2 = z_1$. Действительная часть разности двух комплексных чисел z_1 и z_2 равна разности действительных частей этих чисел, мнимая — разности мнимых частей. Действительно, пусть $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$, $z = a + bi$. По определению разности комплексных чисел

запишем: $z + z_2 = z_1$ или $(a + bi) + (a_2 + b_2i) = a_1 + b_1i$. Из определения суммы комплексных чисел получим $(a + a_2) + (b + b_2)i = a_1 + b_1i$. Применим условие равенства комплексных чисел:

$$\begin{cases} a + a_2 = a_1, \\ b + b_2 = b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = a_1 - a_2, \\ b = b_1 - b_2. \end{cases}$$

Таким образом, если $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$, $z = a + bi$, $z = z_1 - z_2$, то $a = a_1 - a_2$, $b = b_1 - b_2$, или

$$(a_1 + b_1i) - (a_2 + b_2i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i.$$

Пример. Найти разность чисел $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -4 + 5i$.

Решение. $z_1 - z_2 = (2 + 3i) + (-4 + 5i) = (2 - (-4)) + (3 - 5)i = 6 - 2i$.

Замечание. Анализ формул для вычисления суммы, разности, произведения комплексных чисел позволяет сделать вывод, что эти операции выполняются как действия с многочленами, при этом нужно помнить, что $i^2 = -1$.

Формулы сокращенного умножения.

Для комплексных чисел имеют место формулы сокращенного умножения. Но для их рассмотрения необходимо изучить степени числа i .

$$\begin{aligned} i^1 &= i, & i^5 &= i^4 \cdot i = i, \\ i^2 &= -1, & i^6 &= i^4 \cdot i^2 = -1, \\ i^3 &= i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i, & i^7 &= i^4 \cdot i^3 = -i, \\ i^4 &= (i^2)^2 = 1, & i^8 &= (i^4)^2 = 1. \end{aligned}$$

Отсюда видим, что i^n следует представлять в виде $i^n = i^{4k+m}$, где n, k, m — целые числа, $0 \leq m \leq 3$. Получим $i^n = i^{4k} \cdot i^m = i^m$ т.к. $i^4 = 1$.

Формулы для небольших степеней числа i целесообразно запомнить.

Примеры.

$$1. i^{11} = i^8 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i.$$

$$2. i^{99} = i^{24 \cdot 4 + 3} = i^3 = -i.$$

Запишем формулы сокращенного умножения.

$$\begin{aligned} (a + bi)^2 &= a^2 + 2abi - b^2, \\ (a - bi)^2 &= a^2 - 2abi - b^2, \\ (a + bi)^3 &= a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3. \end{aligned}$$

Определение. Числа $a + bi$ и $a - bi$, отличающиеся знаками при мнимой части, называются *комплексно-сопряженными* или просто *сопряженными*.

Число, сопряженное $z = a + bi$, обозначается $\bar{z}$ или $\overline{a + bi}$.

Пример. $2-3i$ и $2+3i$, $\sqrt{2}+5i$ и $\sqrt{2}-5i$ - пары сопряженных комплексных чисел.

Произведение двух сопряженных комплексных чисел равно сумме квадратов действительной и мнимой частей этих чисел. Таким образом, получим еще одну формулу сокращенного умножения (на множестве комплексных чисел).

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 \text{ или } a^2 + b^2 = (a+bi)(a-bi).$$

Примеры.

1. Вычислить $(2-3i)^2$.

Решение: $(2-3i)^2 = 4 - 2 \cdot 2 \cdot 3i - 9 = -5 - 12i$, т.к. $(3i)^2 = 9 \cdot i^2 = -9$.

2. Вычислить $(\sqrt{2}+5i) \cdot (\sqrt{2}-5i)$.

Решение: $(\sqrt{2}+5i)(\sqrt{2}-5i) = (\sqrt{2})^2 + 5^2 = 4 + 25 = 29$.

3. Разложить на множители $b^2 + 4a^2$

Решение: применим формулу для вычисления суммы квадратов двух чисел, получим $b^2 + 4a^2 = (b+2ai)(b-2ai)$.

4. Представить число 25 в виде произведения двух комплексно-сопряженных чисел.

Решение. Решение этой задачи не однозначно. Число 25 нужно представить в виде суммы двух слагаемых. Рассмотрим несколько вариантов.

$$25 = 16 + 9 = (4+3i)(4-3i).$$

$$25 = 9 + 16 = (3+4i)(3-4i).$$

$$25 = 20 + 5 = (\sqrt{20} + \sqrt{5}i)(\sqrt{20} - \sqrt{5}i).$$

$$25 = 21 + 4 = (\sqrt{21} + 2i)(\sqrt{21} - 2i).$$

ДЕЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Определение. Частным от деления комплексного числа z_1 на комплексное число $z_2 \neq 0$ $\left(\frac{z_1}{z_2} \text{ или } z_1 : z_2 \right)$ называется комплексное число z такое, что выполняется равенство $zz_2 = z_1$.

Пусть $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$, $z = a + bi$. Из определения частного $\frac{z_1}{z_2}$ получим

$(a+bi)(a_2+b_2i) = a_1+b_1i$ и найдем числа a и b из этого уравнения:
 $(aa_2 - bb_2) + i(ab_2 + a_2b) = a_1 + b_1i.$

Воспользуемся условием равенства двух комплексных чисел и составим систему уравнений.

$$\begin{cases} aa_2 - bb_2 = a_1, \\ ab_2 + ba_2 = b_1; \end{cases}$$

Решим систему методом алгебраического сложения

$$\begin{array}{ll}
1) + \begin{cases} aa_2 - bb_2 = a_1 \cdot (-b_2), \\ ab_2 + ba_2 = b_1 \cdot a_2. \end{cases} & 2) + \begin{cases} aa_2 - bb_2 = a_1 \cdot a_2, \\ ab_2 + ba_2 = b_1 \cdot b_2. \end{cases} \\
\hline
bb_2^2 + ba_2^2 = -a_1b_2 + b_1a_2 & \hline
aa_2^2 + ab_2^2 = a_1a_2 + b_1b_2 \\
b(b_2^2 + a_2^2) = b_1a_2 - a_1b_2 & a(a_2^2 + b_2^2) = a_1a_2 + b_1b_2 \\
b = \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} & a = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}
\end{array}$$

Заменив a и b найденными значениями их, получим

$$z = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}i$$

Проанализируем полученную формулу. Из того, что $z = \frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i}$ следует, что знаменатели действительной и мнимой частей формулы частного получаются умножением знаменателя выражения $z = \frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i}$ на сопряженное число. Но чтобы значение дроби не изменилось, следует и числитель умножить на это число. Проверим вывод.

$$\begin{aligned}
\frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} &= \frac{(a_1 + b_1i)(a_2 - b_2i)}{(a_2 + b_2i)(a_2 - b_2i)} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + (b_1a_2 - a_1b_2)i}{a_2^2 + b_2^2} = \\
&= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}i.
\end{aligned}$$

Получили верный результат.

Правило деления комплексных чисел. Чтобы разделить комплексное число z_1 на $z_2 \neq 0$, нужно числитель и знаменатель дроби $\frac{z_1}{z_2}$ умножить на число, сопряженное знаменателю, т.е.

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}.$$

Примеры. Выполнить деление.

$$\begin{aligned}
1. \frac{2+3i}{3-4i} &= \frac{(2+3i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{(6-12) + (8+9)i}{9+16} = -\frac{6}{25} + \frac{17}{25}i. \\
2. \frac{\sqrt{3}-4i}{1+2i} &= \frac{(\sqrt{3}-4i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{(\sqrt{3}-8) + (-4-2\sqrt{3})i}{1+4} = \\
&= \frac{\sqrt{3}-8}{5} + \frac{-4-2\sqrt{3}}{5}i.
\end{aligned}$$

ИЗВЛЕЧЕНИЯ КВАДРАТНОГО КОРНЯ. РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим два случая извлечения квадратного корня:

- 1) извлечение квадратного корня из отрицательного действительного числа a .
- 2) извлечение квадратного корня из комплексного числа $a + bi$.

Первый случай. Рассмотрим уравнение $z^2 = a$, где $a < 0$. Представим $a = -1 \cdot |a|$ или $a = i^2 \cdot |a|$. Уравнение примет вид $z^2 - i^2 |a| = 0$. Откуда $(z - i\sqrt{|a|})(z + i\sqrt{|a|}) = 0$. Значит, уравнение $z^2 = a$, где $a < 0$ имеет два корня: $z_1 = i\sqrt{|a|}$, $z_2 = -i\sqrt{|a|}$.

Пример. Найти все значения $\sqrt{-36}$, $\sqrt{-2}$.

Решение. $\sqrt{-36} = \pm i\sqrt{|-36|} = \pm 6i$; $\sqrt{-2} = \pm i\sqrt{|-2|} = \pm i\sqrt{2}$.

Второй случай. Пусть требуется найти все значения $\sqrt{a+bi}$. Обозначим $\sqrt{a+bi} = z$, где $z = u + iv$, числа a, b, u, v — действительные. Выполним преобразования: $\sqrt{a+bi} = u + iv$, $a + bi = (u + iv)^2$, $a + bi = u^2 - v^2 + 2iuv$.

На основании условия равенства комплексных чисел составим систему уравнений:

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = a, \\ 2uv = b. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем u^2, v^2 , а значит и все значения корня. Подробно рассмотрим решение этой задачи на примере.

Пример. Найти все значения выражения $\sqrt{5-12i}$.

Решение. $z = \sqrt{5-12i}$, $z = u + iv$ (u, v — действительные числа), тогда $\sqrt{5-12i} = u + iv$, откуда

$$5 - 12i = u^2 - v^2 + 2iuv \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - v^2 = 5, \\ 2uv = -12. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -\frac{6}{v}, \\ u^2 - v^2 = 5. \end{cases}$$

Первое уравнение системы примет вид: $\frac{36}{v^2} - v^2 = 5$, $v \neq 0$. Отсюда $v^4 + 5v^2 - 36 = 0$, решив это уравнение, получим $v^2 = 4$, $v_1 = 2$, $v_2 = -2$. Из уравнения $u = -\frac{6}{v}$ найдем $u_1 = -3$, $u_2 = 3$.

Значит, $z_1 = -3 + 2i$, $z_2 = 3 - 2i$ и $\sqrt{5-12i} = \pm(3-2i)$.

Проверим: $z^2 = (\pm(3-2i))^2 = 9 - 4 - 12i = 5 - 12i$.

Ответ: $\pm(3-2i)$.

Замечание. Корень квадратный из комплексного числа, т.е. $\sqrt{a+bi}$, имеет два взаимно противоположных значения.

Решение квадратных уравнений

Уравнение вида $az^2 + bz + c = 0$, где $a \neq 0$, a, b, c – как действительные, так и комплексные числа, решается по формулам:

$$1) \quad z_{1,2} = \frac{(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a}, \text{ где } b^2 - 4ac = D - \text{дискриминант.}$$

$$2) \quad z_{1,2} = \frac{(-k \pm \sqrt{k^2 - ac})}{a}, \text{ где } b = 2k.$$

$$3) \quad z_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - c}, \text{ если } a = 1, b = 2k.$$

Корни уравнения $az^2 + bz + c = 0$ могут быть как действительными, так и комплексными. Для комплексных корней также справедлива теорема Виета и формула разложения левой части на множители.

Если z_1 и z_2 – корни уравнения $az^2 + bz + c = 0$, то

$$1. \quad z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}.$$

$$2. \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

$$3. \quad az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$

Примеры. Решите уравнения.

$$1. \quad z^2 + 4 = 0.$$

$$2. \quad z^2 + 3 - 4i = 0.$$

$$3. \quad z^2 + 2z + 5 = 0.$$

$$4. \quad z^2 - 2iz - 5 = 0.$$

$$5. \quad z^2 - 20z + 92 + 6i = 0.$$

Решение уравнений.

1. Разложим левую часть уравнения на множители, получим $(z + 2i)(z - 2i) = 0$, откуда $z_1 = -2i$, $z_2 = 2i$.

Ответ: $\pm 2i$.

2. Представим уравнение следующим образом: $z^2 = -3 + 4i$,

откуда $z = \pm \sqrt{-3 + 4i}$. Пусть $z = x + iy$, где $x, y \in \mathbf{R}$, тогда $x + iy = \pm \sqrt{-3 + 4i}$. Возведем обе части уравнения в квадрат и применим условие равенства двух комплексных чисел.

$(x + iy)^2 = -3 + 4i$, $x^2 - y^2 + 2ixy = -3 + 4i$. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3, \\ 2xy = 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -3, \\ y = \frac{2}{x}; \end{cases}$$

$$x^2 - \frac{4}{x^2} = -3, \quad x^4 + 3x^2 - 4 = 0.$$

Решив уравнение, найдем $x^2 = 1$, $x^2 = -4$. Второе значение не подходит, так как $x \in \mathbf{R}$. Итак, $x_1 = 1$, тогда $y_1 = 2$, $x_2 = -1$, тогда $y_2 = -2$.

Получим $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -(1 + 2i)$.

Проверим: $z^2 = (\pm(1+2i))^2 = 1 - 4 + 4i = -3 + 4i$.

Ответ: $\pm(1+2i)$.

3. Применим формулу 3): $z = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm \sqrt{-4} = -1 \pm 2i$.

Получили $z_1 = -1 - 2i$, $z_2 = -1 + 2i$ — два комплексно-сопряженных числа.

Проверим: для $z_1 = -1 - 2i$ получим $(-1 - 2i)^2 + 2(-1 - 2i) + 5 = 1 - 4 + 4i - 2 - 4i + 5 = 0$.

Для $z_2 = -1 + 2i$ получим $(-1 + 2i)^2 + 2(-1 + 2i) + 5 = 1 - 4 - 4i - 2 + 4i + 5 = 0$.

Ответ: $-1 - 2i$, $-1 + 2i$.

4. Применим формулу 3): $z = i \pm \sqrt{-1+5} = i \pm 2$

Ответ: $\pm 2 + i$.

5. Применим формулу 3): $z = 10 \pm \sqrt{100 - 92 - 6i} = 10 \pm \sqrt{8 - 6i}$.

Найдем $\sqrt{8-6i} = x + iy$; $x, y \in \mathbf{R}$. Откуда $8 - 6i = x^2 - y^2 + 2ixy$.

Воспользуемся условием равенства двух комплексных чисел:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8, \\ 2xy = -6. \end{cases}$$

Из второго уравнения найдем $y = -\frac{3}{x}$ и подставим в первое:

$$x^2 - \frac{9}{x^2} = 8, \quad x^4 - 8x^2 - 9 = 0, \quad x^2 = 9, \quad x^2 = -1 \text{ (не подходит, так как } x \in \mathbf{R}).$$

Получили $x = \pm 3$, тогда $y = \mp 1$, значения корней $3 - i$, $-3 + i$.

Покажем, что из этих двух значений достаточно взять одно, или же в формулах 1), 2) и 3) перед корнем взять один знак и брать оба значения корня. (Это утверждение можно доказать в общем виде).

Найдем z :

$$\begin{aligned} z = 10 \pm \sqrt{3-6i} &= 10 \pm (3-i) \Rightarrow z_1 = 13-i, & z_2 = 7+i. \\ z = 10 \pm \sqrt{3-6i} &= 10 \pm (-3-i) \Rightarrow z_1 = 13-i, & z_2 = 7+i. \end{aligned}$$

Получили в обоих случаях $z_1 = 13 - i$, $z_2 = 7 + i$.

Ответ: $13 - i$, $7 + i$.

ВЫВОДЫ

1. Комплексное число z в алгебраической форме имеет вид:

$$z = a + bi, \text{ где}$$

a — действительная часть комплексного числа,

b — мнимая часть комплексного числа,

i — мнимая единица.

2. Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части.

Если $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$ и $z_1 = z_2$, то $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ и наоборот, если $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, то $z_1 = z_2$.

3. Комплексное число равно нулю тогда и только тогда, когда $a = 0, b = 0$.
4. Операции сложения, вычитания, умножения комплексных чисел выполняются как операции с многочленами, учитывая степень числа i .
 $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^n = i^{4k+m}$, где k, m – натуральные числа, $0 \leq m \leq 3$.
5. Операция деления двух комплексных чисел выполняется умножением знаменателя и числителя дроби (делимого и делителя) на число, сопряжённое знаменателю (делителю).
6. Имеют место все формулы сокращённого умножения и добавляется формула суммы квадратов двух чисел: $a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi)$.
7. Операция извлечения квадратного корня из комплексного числа выполняется в алгебраической форме. При отрицательном дискриминанте уравнение имеет комплексные корни.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Изображение комплексного числа

Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат. Комплексное число $z = a + bi$ изображается точкой плоскости с координатами (a, b) , и эта точка обозначается той же буквой z . При этом каждому комплексному числу $a + bi$ будет соответствовать одна точка плоскости xOy с координатами (a, b) , и каждой точке плоскости с координатами (a, b) будет соответствовать комплексное число.

Действительные числа изображаются точками на оси Ox , а чисто мнимые на оси Oy . В связи с этим ось Ox называют *действительной осью*, ось Oy – *мнимой*, а плоскость xOy – *комплексной плоскостью*.
 Комплексное число $z = a + bi$ в таком случае принято также обозначать $z = x + yi$, а число $0 + 0i = 0$ – начало координат, $O(0; 0)$.

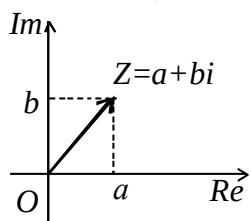


Рис.2

Известно, что всякой точке плоскости xOy можно поставить в соответствие вектор с началом в точке $(0; 0)$ и концом в точке (x, y) . Поэтому говорят, что комплексное число $z = x + yi$ изображает вектор.

Таким образом, получили геометрический смысл комплексного числа.

Комплексное число $z = x + yi$ с геометрической точки зрения определяет в плоскости xOy точку (x, y) и вектор с координатами (x, y) .

Модуль комплексного числа

Как и для всякого вектора определим модуль комплексного числа $|z|$ или $|x + yi|$.

Изобразим на комплексной плоскости вектор, соответствующий числу $z = x + yi$. Из рисунка по теореме Пифагора находим $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ и видим, что $|z|$ — расстояние от точки $z = (x + yi)$ до начала координат O или расстояние от точки z до точки O .

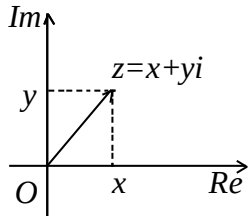


Рис.3

Нетрудно заметить, что имеют место неравенства $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$.

Пример. Вычислить $|(3 + 4i) - (5 + 2i)|$.

Решение. $|(3 + 4i) - (5 + 2i)| = |-2 + 2i| = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$.

С помощью векторной интерпретации наглядно иллюстрируются сложение и вычитание комплексных чисел.

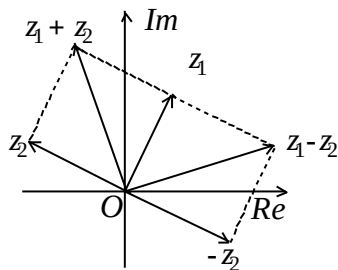


Рис.4

Число $z_1 + z_2$ изображается вектором, построенным по обычному правилу сложения векторов z_1 и z_2 (рис.4).

Пример. Выяснить геометрический смысл выражения $|z| = 3$.

Решение. Из геометрического смысла $|z|$ следует, что точка z удалена от начала координат на 3 единицы. Такая точка не единственная. Известно, что множество точек, равноудалённых от одной точки — окружность.

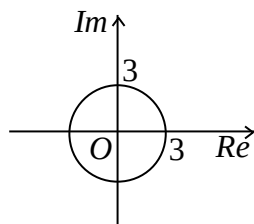


Рис.5

Получим, что $|z| = 3$ — окружность радиуса 3 с центром в точке O . Можем получить уравнение этой окружности в декартовой прямоугольной системе координат: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, отсюда $\sqrt{x^2 + y^2} = 3$ или $x^2 + y^2 = 9$ — уравнение окружности радиуса 3 с центром в начале координат.

Построение точек и линий на комплексной плоскости

Рассмотрим решение этой задачи на примерах.

1. Построить точки на комплексной плоскости:

$$z_1 = -2 + 3i, \quad z_2 = -1 - 2i, \quad z_3 = 1 - 3i.$$

Решение. Так как действительная часть комплексного числа $z = x + yi$ является абсциссой, а мнимая ординатой, то изобразим точки $z_1(-2; 3)$, $z_2(-1; -2)$, $z_3(1; -3)$.

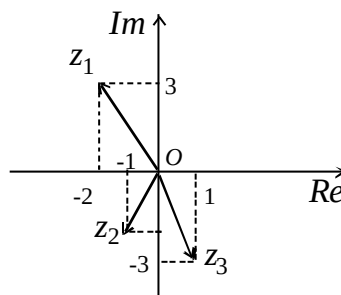


Рис.6

2. Для точки $z = 1 + 2i$ записать и построить следующие точки:

- а) z_1 - симметричную относительно точки O ,
- б) z_2 - симметричную относительно оси Ox ,
- в) z_3 - симметричную относительно оси Oy ,
- г) z_4 - симметричную относительно прямой $y = x$ (биссектрисы первого координатного угла).

Решение. Вспомните каждый вид симметрии. Сопоставьте свои решения с предложенными и объясните их.

а) $z_1 = -1 - 2i$

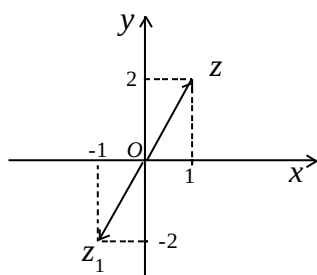


Рис.7

б) $z_2 = 1 - 2i$

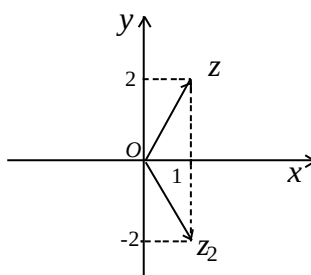


Рис.8

в) $z_3 = -1 + 2i$

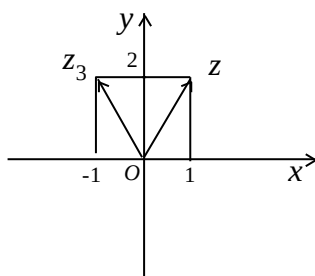


Рис.9

г) $z_4 = 2 + i$

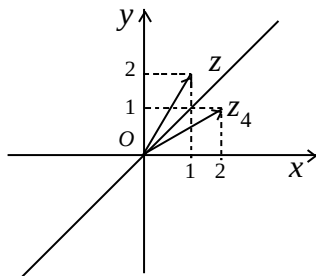


Рис.10

3. Выяснить геометрический смысл выражения $|z_1 - z_2|$, используя геометрический смысл модуля комплексного числа.

Решение. Если $z_1 = x_1 + y_1i$, $z_2 = x_2 + y_2i$, то

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i,$$

поэтому $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ - это расстояние между точками $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$.

4. Выяснить геометрический смысл и построить заданные множества точек комплексной плоскости. Записать уравнения в декартовой прямоугольной системе координат.

4.1. $|z - 3| = 2$.

4.2. $|z + 2 - i| = 1$.

4.3. $|z + i| = |z - 1 - i|$.

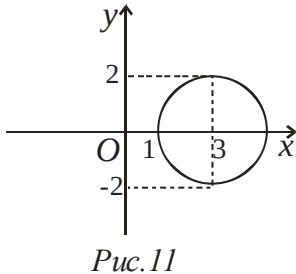


Рис.11

Решение. 4.1. Из геометрического смысла выражения $|z_1 - z_2| = a$ следует, что расстояние между точками z_1 и z_2 равно a . Значит $|z - 3| = 2$ означает, что z - множество точек комплексной плоскости, удалённых от точки $(3; 0)$ на 2. Итак, уравнение $|z - 3| = 2$ задаёт окружность с центром в точке $(3; 0)$ радиуса 2.

Получим уравнение в декартовых координатах:

$$|z - 3| = |x + yi - 3| = |(x - 3) + yi| = \sqrt{(x - 3)^2 + y^2}.$$

Откуда $\sqrt{(x - 3)^2 + y^2} = 2$, $(x - 3)^2 + y^2 = 4$.

4.2. Так как $|z + 2 - i| = |z - (-2 + i)|$, получим $|z - (-2 + i)| = 1$ - окружность радиуса 1 с центром в точке $(-2; 1)$ (см. рис.12).

Найдём уравнение в декартовых координатах. Преобразуем левую часть уравнения:

$$|z + 2 - i| = |x + yi + 2 - i| = |(x + 2) + (y - 1)i| = 1$$

или $\sqrt{(x + 2)^2 + (y - 1)^2} = 1$, $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$ - уравнение окружности радиуса 1 с центром в точке $(-2; 1)$.

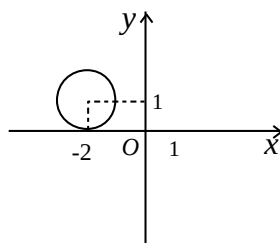


Рис.12

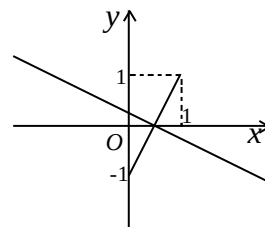


Рис.13

4.3. $|z + i| = |z - 1 - i|$.

Преобразуем правую часть уравнения $|z - 1 - i| = |z - (1 + i)|$, получим $|z + i| = |z - (1 + i)|$. Откуда следует, что z - множество точек, равноудалённых от точек $-i$ и $1 + i$. А это - серединный перпендикуляр к отрезку $[-i, 1 + i]$. Изобразим на плоскости отрезок, перпендикуляр и найдём уравнение перпендикуляра.

$$|x + yi + i| = |x + yi - 1 - i|, \quad |x + (y + 1)i| = |(x - 1) + (y - 1)i|, \quad |x - (-y - 1)i| = |x - 1 - (-y + 1)i|,$$

$$\sqrt{x^2 + (y + 1)^2} = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2}.$$

$$x^2 + y^2 + 2y + 1 = x^2 - 2x + 1 + 1 - 2y + y^2,$$

$2x + 4y - 1 = 0$ - уравнение прямой. Итак, уравнению $|z + i| = |z - 1 - i|$ соответствует уравнение $2x + 4y - 1 = 0$, которое задаёт перпендикуляр, проходящий через середину отрезка $[-i, 1 + i]$ (см. рис.13).

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ И ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФОРМЫ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Вы научились выполнять арифметические операции, извлечение квадратного корня для комплексных чисел, заданных в алгебраической форме. Некоторые операции, в частности, извлечение корня n -й степени из комплексного числа выполняются в тригонометрической форме. Перейдем к изучению этой формы задания комплексного числа.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Положение точки $z = x + iy$ на комплексной плоскости однозначно определяется не только декартовыми координатами x, y ,

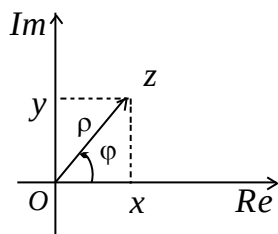


Рис.14

но и полярными координатами ρ, φ (см. рис. 14), где $\rho = |z|$ - расстояние от точки O до точки z (или модуль z), а φ - угол между действительной осью и вектором z , отсчитываемый от положительного направления действительной оси. При этом, если отсчет ведется против часовой стрелки, то величина угла считается

положительной, а если по часовой стрелки - отрицательной. Этот угол называется *аргументом* комплексного числа z ($z \neq 0$) и обозначается $\varphi = \arg z$. Для числа $z = 0$ аргумент не определен, поэтому во всех дальнейших рассуждениях, связанных с понятием аргумента, предполагается, что $z \neq 0$. Из рисунка видно, что

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi.$$

Значит, любое комплексное число $z \neq 0$ можно представить в виде $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ или $x + iy = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Определение. Запись комплексного числа z в виде $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, где $\rho > 0$, называется *тригонометрической формой* комплексного числа.

Очевидно, что если $z = x + iy$ и $\varphi = \arg z$, то

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (6)$$

Замечание 1. Система уравнений (6) имеет бесконечно много решений и все эти решения задаются формулой $\varphi = \varphi_0 + 2\pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), поэтому для числа $z \neq 0$ аргумент определяется не однозначно, т.е. если $\varphi = \arg z$, то $\varphi + 2\pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) – тоже аргументы z . Главным значением аргумента числа $z \neq 0$ принято называть аргумент из промежутков $(-\pi; \pi]$ или $[0; 2\pi)$.

Замечание 2. Не всякая запись комплексного числа через тригонометрические функции является его тригонометрической формой. Например, записи $1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, $1+i = -\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$ не являются тригонометрической формой числа $1+i$, хотя равенства верные. (Объясните).

Утверждение. Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны модули этих чисел, а аргументы отличаются на $2\pi k$, где k – целое число.

Пусть $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

Если $z_1 = z_2$, то $\rho_1 = \rho_2$, $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k$, где k – целое.

Из системы (6) вытекает, что аргумент φ комплексного числа $z = x + iy$ удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \quad (7)$$

Но следует иметь в виду, что не все решения уравнения (7) являются решениями системы (6). Так как знаки тангенса в первой и третьей четвертях, во второй и четвертой четвертях совпадают, то значение главного аргумента находят по правилу:

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0, y > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0, y < 0; \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{если } x > 0, (I, IV - \text{четв.}); \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi, & \text{если } x < 0, y > 0, (II \text{ четв.}); \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi, & \text{если } x < 0, y < 0, (III \text{ четв.}). \end{cases}$$

Пример 1. Найти на комплексной плоскости точки z , удовлетворяющие условию $\frac{\pi}{4} \leq \arg z < \frac{5\pi}{4}$. Это все точки плоскости, расположенные между лучами

$\frac{\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{4}$, включая точки луча $\frac{\pi}{4}$, но исключая точки луча $\frac{5\pi}{4}$ (см. рис.15).

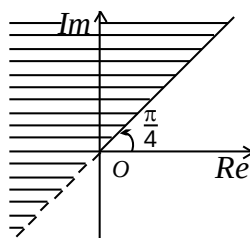


Рис.15

Пример 2. Записать данные числа в тригонометрической форме.

1. $z = 1 + i$

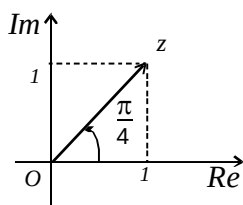


Рис.16

$$|z| = \sqrt{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

2. $z = -4 + 3i$

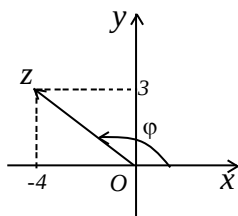


Рис.17

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{3}{4}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \left(-\frac{3}{4} \right),$$

$$|z| = \sqrt{16 + 9} = 5.$$

$$-4 + 3i = 5 \left(\cos \left(\operatorname{arctg} \left(-\frac{3}{4} \right) \right) + i \sin \left(\operatorname{arctg} \left(-\frac{3}{4} \right) \right) \right)$$

Если $|z| = 1$, $\varphi = \arg z$, то имеем $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$. Комплексное число $\cos \varphi + i \sin \varphi$ обозначается символом $e^{i\varphi}$, т.е. $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$. Тогда любое комплексное число $z \neq 0$ можно представить в виде

$$z = \rho e^{i\varphi}.$$

Определение. Запись комплексного числа z в виде $z = \rho e^{i\varphi}$, где $\rho = |z|$, называется *показательной формой* комплексного числа.

ОПЕРАЦИИ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Операции сложения, вычитания комплексных чисел удобно выполнять в алгебраической форме, умножать и делить их лучше в тригонометрической форме, а извлечение корня n -ой степени из комплексного числа выполняется только в тригонометрической форме.

Рассмотрим эти операции.

УМНОЖЕНИЕ

Пусть даны два комплексных числа $z_1 = \rho_1(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, $z_2 = \rho_2(\cos \beta + i \sin \beta)$.

Задача. Найти произведение $z_1 z_2$.

Решение. Так как $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, $\cos \beta$, $\sin \beta$ – числа, то можем применить правило умножения комплексного числа в алгебраической форме.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1(\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot \rho_2(\cos \beta + i \sin \beta) = \\ &= \rho_1 \rho_2 ((\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)) = \\ &= \rho_1 \rho_2 (\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)). \end{aligned}$$

Получим

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)).$$

Итак, *произведение двух комплексных чисел (не равных нулю) в тригонометрической форме равно комплексному числу, модуль которого равен произведению модулей, а аргумент равен сумме аргументов данных чисел.*

Пример. Вычислить $z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \cdot 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right)$

Решение. $z = 2\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$.

ВОЗВЕДЕНИЕ В СТЕПЕНЬ. ФОРМУЛА МУАВРА

Рассмотрим возведение комплексного числа в степень с натуральным показателем. В этом случае задача сведётся к умножению равных множителей, поэтому имеет место формула

$$\begin{aligned} z^n &= \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \text{ или} \\ (\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n &= \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \end{aligned}$$

где $|z^n| = |z|^n = \rho^n$.

При возведении комплексного числа в степень с натуральным показателем n модуль данного числа возводится в степень n , а аргумент умножается на n .

Пример. Вычислить $z = (1+i)^{16} \cdot (-1+i\sqrt{3})^5$

Решение. Представим числа $(1+i)$ и $(-1+i\sqrt{3})$ в тригонометрической форме, получим:

$$1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \quad -1+i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

Запишем данное выражение в тригонометрической форме:

$$\begin{aligned} &\left(\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right)^{16} \cdot \left(2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \right)^5 = \\ &= (\sqrt{2})^{16} \left(\cos \frac{16\pi}{4} + i \sin \frac{16\pi}{4} \right) \cdot 2^5 \left(\cos \frac{10\pi}{3} + i \sin \frac{10\pi}{3} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2^{8+5} \left(\cos \left(\frac{16\pi}{4} + \frac{10\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{16\pi}{4} + \frac{10\pi}{3} \right) \right) = \\
&= 2^{13} \left(\cos \frac{22\pi}{3} + i \sin \frac{22\pi}{3} \right) = 2^{13} \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -2^{12} (1 + i\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

Ответ: $-2^{12}(1+i\sqrt{3})$.

Формула Муавра

В формуле $(\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ положим $\rho=1$, тогда получим частный случай возведения комплексного числа в степень n :

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

Эта формула называется формулой Муавра. Формулу Муавра (в частности) применяют для выражения синусов и косинусов аргументов $n\varphi$ через синусы и косинусы аргумента φ .

Пример. Используя формулу Муавра, вывести формулы двойного угла $(\sin 2\varphi, \cos 2\varphi)$.

Решение. Вычислим $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^2$ двумя способами: возведением в квадрат по формуле Муавра и по формуле квадрата двучлена.

- 1) $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^2 = \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi$.
- 2) $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^2 = \cos^2 \varphi + 2i \sin \varphi \cos \varphi - \sin^2 \varphi =$
 $= (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + i 2 \sin \varphi \cos \varphi$.

Воспользуемся условием равенства комплексных чисел, получим известные формулы:

$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi, \quad \sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi.$$

Замечание. Этим способом можно найти формулы для $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$, если уметь возводить бином в степень n , т.е. вычислять $(a+b)^n$.

ДЕЛЕНИЕ

Задача. Найти частное $\frac{z_1}{z_2}$ двух комплексных чисел $z_1 = \rho_1(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ и

$$z_2 = \rho_2(\cos \beta + i \sin \beta)$$

Решение. Применим правило деления комплексных чисел в алгебраической форме.

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1(\cos \alpha + i \sin \alpha)}{\rho_2(\cos \beta + i \sin \beta)} = \frac{\rho_1(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta - i \sin \beta)}{\rho_2(\cos \beta + i \sin \beta)(\cos \beta - i \sin \beta)} = \\
&= \frac{\rho_1(\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta) + i(\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta)}{\rho_2(\cos^2 \beta + \sin^2 \beta)} = \\
&= \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)).
\end{aligned}$$

Получим $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta))$.

Частное от деления двух комплексных чисел (не равных нулю) равно комплексному числу, модуль которого равен частному модулей, а аргумент равен разности аргументов данных чисел.

Пример. Вычислить:
$$z = \frac{\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)}{2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right)}.$$

Решение.

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)$$

ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ СТЕПЕНИ n

Определение. Корнем n -й степени из комплексного числа z называется такое комплексное число w , n -я степень которого равна z , т.е. $w^n = z$, где n - натуральное число. (Обозначение $w = \sqrt[n]{z}$)

Теорема. Для любого натурального числа n и любого комплексного числа $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, где $z \neq 0$, существует n различных значений корня n -й степени, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right),$$

где $k=0, 1, 2, \dots, n-1, n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, где $\rho = |z|$,

φ - главное значение аргумента.

Число w будем находить в виде: $w = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, т.е. необходимо найти r и α .

Из определения $w^n = z$ или

$$(r(\cos \alpha + i \sin \alpha))^n = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Получим, что $r^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha) = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Два комплексных числа в тригонометрической форме равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются слагаемым, кратным 2π .

Тогда $r^n = \rho$, $n\alpha = \varphi + 2\pi k$, где k - целое, откуда $r = \sqrt[n]{\rho}$, так как $r \geq 0$, $\alpha = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}$, k - целое число.

Чтобы значения корней были различными, число k должно принимать значения $0, 1, 2, \dots, n-1$.

Значение аргумента при $k=0$ будем обозначать φ_0 , т.е. $\varphi_0 = \frac{\varphi}{n}$.

Получим

$$\sqrt[n]{\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right),$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$.

Пример. Найти все значения $\sqrt[3]{1}$.

Решение. $z = 1 + 0i, x = 1, y = 0, |z| = 1, \varphi = 0$.

$$\sqrt[3]{1} = 1 \left(\cos \frac{0 + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{0 + 2\pi k}{3} \right), \text{ где } k = 0, 1, 2.$$

$k = 0$, тогда $w_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$;

$k = 1$, тогда $w_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$k = 2$, тогда $w_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $1; -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Можно доказать, что все значения $\sqrt[n]{z}$ являются вершинами правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{\rho}$, значения аргументов соседних точек отличаются на $\frac{2\pi}{n}$.

Правило вычисления $\sqrt[n]{z}$

1) Изобразить в некоторой декартовой прямоугольной системе координат окружность радиуса $\sqrt[n]{\rho}$.

2) Провести луч $\varphi_0 = \frac{\varphi}{n}$ (построить угол φ_0).

3) Разделить окружность на n равных частей, начиная от точки пересечения луча $\frac{\varphi}{n}$ с окружностью.

4) Найти абсциссы и ординаты полученных точек. Они и будут соответственно действительной и мнимой частями значений $\sqrt[n]{z}$.

Примеры. 1. Вычислить: $w = \sqrt[3]{1}$.

Решение. $\rho = 1, \varphi = 0, \varphi_0 = 0, n = 3, \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{3}$, аргументы двух «соседних» чисел

отличаются на $\frac{2\pi}{3}$.

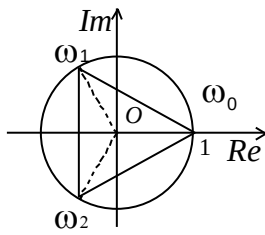


Рис.18

$$w_0 = 1 + 0i = 1,$$

$$w_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$w_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Изобразим полученные числа на комплексной плоскости (рис.18). Очевидно, что все они будут лежать на окружности радиуса 1 и будут образовывать правильный треугольник.

Ответ: $\left\{1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

2. Вычислить: $w = \sqrt[4]{1}$.

Решение. $\rho = 1$, $\varphi = 0$, $\varphi_0 = 0$, $n = 4$, $\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Значит, аргументы двух

«соседних» чисел отличаются на $\frac{\pi}{2}$.

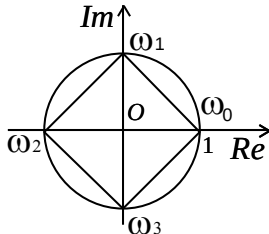


Рис.19

$$w_0 = (1; 0) = 1 + 0i = 1,$$

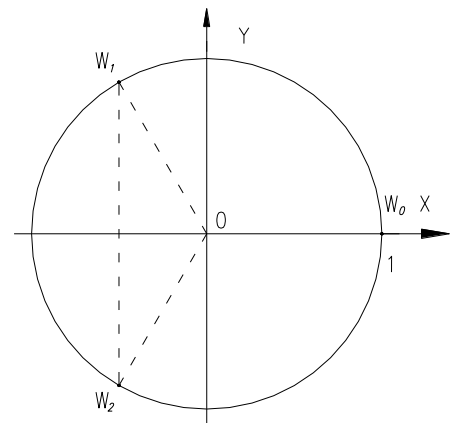
$$w_1 = (0; 1) = 0 + i = i,$$

$$w_2 = (-1; 0) = -1 + 0i = -1,$$

$$w_3 = (0; -1) = 0 - i = -i.$$

Проверим: $1^4 = 1$; $(i)^4 = 1$; $(-1)^4 = 1$; $(-i)^4 = 1$.

Ответ: $\{1, i, -1, -i\}$.



ВЫВОДЫ

1. Комплексное число z в тригонометрической форме имеет вид: $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, где ρ - модуль комплексного числа, $0 < \rho < \infty$, φ - аргумент комплексного числа.

1. Для любого комплексного числа $z \neq 0$ модуль определяется однозначно, а аргумент неоднозначно.

$\arg z$ - главное значение аргумента, $-\pi < \arg z \leq \pi$.

2. Формулы перехода от алгебраической формы $z = x + iy$ к тригонометрической $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ имеют вид:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad \sqrt{x^2 + y^2} = \rho.$$

3. В тригонометрической форме целесообразно выполнять операции умножения, деления, возведения в степень с натуральным показателем.

Если $z_1 = \rho_1(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $z_2 = \rho_2(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, $z = \rho(\cos \beta + i \sin \beta)$, n – натуральное число, то

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos(\varphi + \alpha) + i \sin(\varphi + \alpha)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\varphi - \alpha) + i \sin(\varphi - \alpha)),$$

$$z^n = \rho^n (\cos n\beta + i \sin n\beta).$$

4. Извлечение корня n -й степени из комплексного числа, всегда выполняется в тригонометрической форме по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right),$$

где $\rho = |z|$, φ – главное значение аргумента числа z , n – натуральное число, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

5. Полезно сопровождать извлечение корня геометрической иллюстрацией.

Контроль теоретических знаний

Вопрос 1. Дайте определение комплексного числа.

Ожидаемый ответ: числа вида $a+bi$, где a и b – действительная числа, $i^2 = -1$ называются комплексными числами.

Вопрос 2. Сколько форм может иметь комплексное число?

Ожидаемый ответ: четыре формы: алгебраическую, геометрическую, тригонометрическую, показательную.

Вопрос 3. В какой форме комплексные числа целесообразно складывать, вычитать, умножать и делить?

Ожидаемый ответ: в алгебраической.

Вопрос 4. В какой форме комплексные числа целесообразно возводить в степень и извлекать из под корня?

Ожидаемый ответ: в тригонометрической.

Вопрос 5. Назовите важные понятия для комплексного числа.

Ожидаемый ответ: модуль и аргумент.

Вопрос 6. Какое из понятий определяется однозначно, а какое - нет?

Ожидаемый ответ: для любого комплексного числа $z \neq 0$ модуль определяется однозначно, а аргумент неоднозначно.

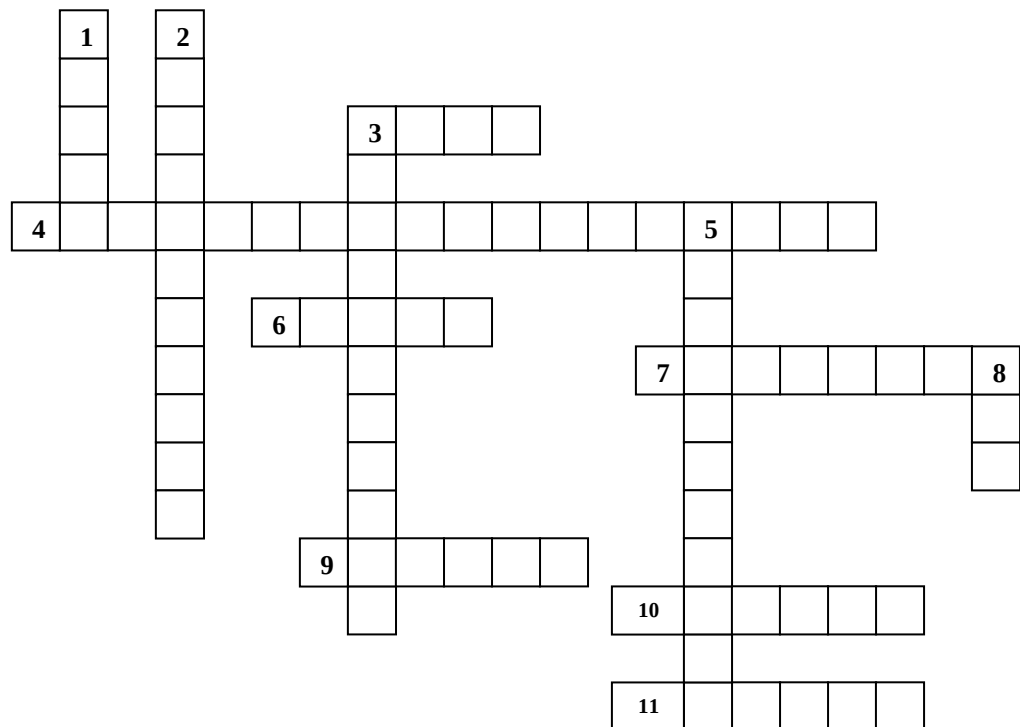
Вопрос 7. Какое из комплексных чисел не имеет тригонометрической и показательной формы и почему?

Ожидаемый ответ: число нуль, так как для него не определено понятие аргумента.

Вопрос 8. Какое из известных вам числовых множеств является больше?

Ожидаемый ответ: множество комплексных чисел, которое включает в себя множество действительных чисел.

Кроссворд



Вопросы:

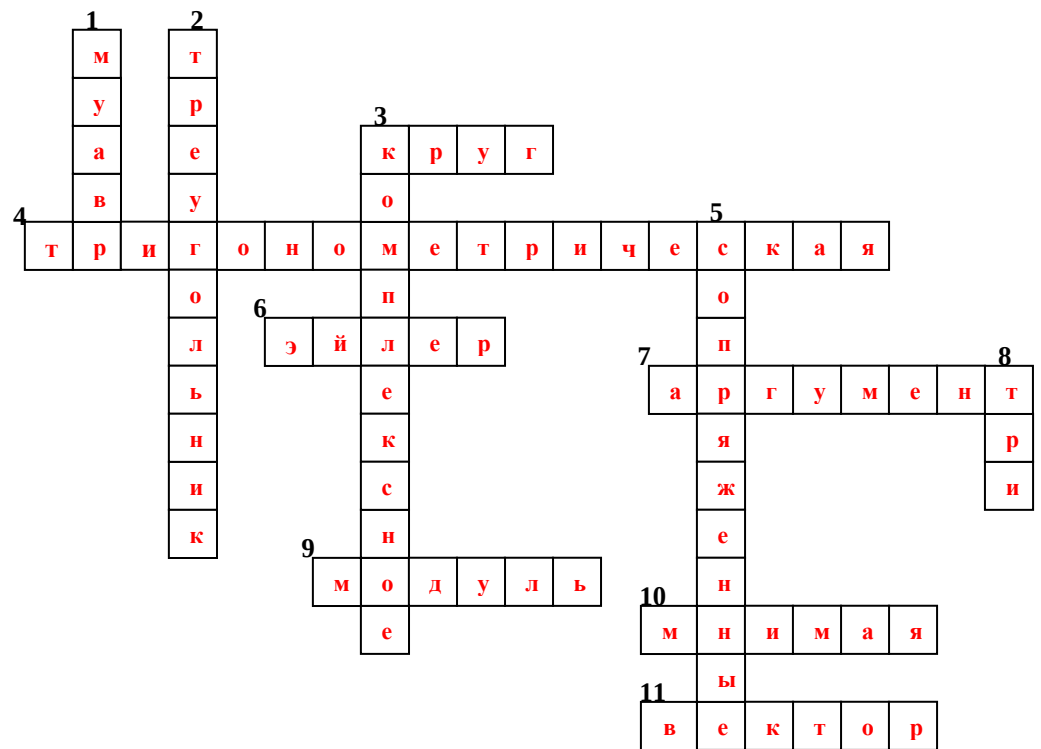
По горизонтали:

3. Множество точек на плоскости, задающееся условием $|z| \leq a$?
4. Одна из форм задания комплексного числа.
6. Чье имя носит формула $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi$.
7. $\arg z$.
9. Длина вектора соответствующего комплексного числа.
10. $\operatorname{Im} z$ - ... часть числа.
11. Геометрическая интерпретация комплексного числа.

По вертикали:

1. Чье имя носит формула $z^n = |z|^n \cdot (\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi)$?
2. Какая фигура получится при изображении на плоскости всех решений уравнения $u^3 - z = 0$?
3. Число вида $a + bi$
5. Числа $1-2i$ и $1+2i$?
8. Сколько форм записи комплексных чисел вы знаете?

Ответы:



Контроль практических умений и навыков

Задание 1. Назовите значение действительной и мнимой части числа и четверть, в которой оно находится, для чисел: $-2+3i$; $-1-i$; $2-9i$; i , -2 .

Ответ: $a=-2$, $b=3$, II четверть; $a=-1$, $b=-1$, III четверть; $a=2$, $b=-9$, IV четверть; $a=0$, $b=1$, четверть определить нельзя; $a=-2$, $b=0$, четверть определить нельзя.

Задание 2. Вычислите:

1) $(4+2i)+(1+5i)$.

Решение. По правилу сложения комплексных чисел получим

$$(4+2i)+(1+5i)=(4+1)+(2+5)i=5+7i.$$

2) $(3+5i)-(6+3i)$.

Решение. По правилу вычитания комплексных чисел получим

$$(3+5i)-(6+3i)=(3-6)+(5-3)i=-3+2i.$$

3) $2i \cdot 3i$.

Решение. $2i \cdot 3i = 6i^2 = -6$.

4) i^{16} .

Решение. $i^{16} = i^{4 \cdot 4} = 1$

5) i^{25} .

Решение. $i^{25} = i^{4 \cdot 6 + 1} = i$

6) $\frac{2}{3i}$.

Решение. Умножив делимое и делитель на i , получим

$$\frac{2}{3i} = \frac{2i}{3i \cdot i} = \frac{2i}{-3} = -\frac{2}{3}i.$$

Осмысление, закрепление и расширение знаний, умений и навыков

Задача 1. Возвести в степень комплексное число $[6-6i]^{10}$

Решение: мы уже имеем тригонометрическую форму данного числа:

$$6-6i = 6\sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right].$$

Следовательно, по формуле Муавра (Приложение Б), имеем:

$$[6-6i]^{10} = 72^5 \left[\cos\left(10 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(10 \cdot \frac{\pi}{4}\right) \right] = 72^5 \left[\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) \right].$$

Задача 2. Извлечь из под корня комплексное число $\sqrt{6-6i}$

Решение: имеем тригонометрическую форму числа: $6-6i = 6\sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right]$. По

формуле (9) (Приложение Б) получим:

$$\sqrt{6-6i} = \left(\cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{2} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{2} \right) = \cos\left(\frac{\pi}{8} + \pi k\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{8} + \pi k\right), k=0, 1;$$

если $k=0$, то $z_0 = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{8}\right);$

если $k=1$, то $z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{8} + \pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{8} + \pi\right).$

Задача 3. Решить квадратное уравнение $z^2 - 6z + 34 = 0$

Решение: Решим квадратное уравнение $z^2 - 6z + 34 = 0$.

Первым шагом определим дискриминант уравнения: $D = 36 - 136 = -100$.

В нашем случае дискриминант оказался отрицательным, и в случае с действительными числами у уравнения нет решений, но у нас вариант с комплексными числами, поэтому можем продолжать решение: $\sqrt{D} = \pm 10i$.

Как известно из формул дискриминанта у нас образуется 2 корня: $z_{1,2} = \frac{6 \pm 10i}{2}$

$z_{1,2} = 3 \pm 5i$ – сопряженные комплексные корни

Т.о., у уравнения $z^2 - 6z + 34 = 0$ есть 2 сопряженных комплексных корня: $z_1 = 3 - 5i$, $z_2 = 3 + 5i$.

Теперь можно решить любое квадратное уравнение!

Обратите внимание!

У любого уравнения с многочленом n -ой степени $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$ есть ровно n корней, некоторые из них могут быть комплексными.

Задание 4. Составить квадратное уравнение, которое имеет корни $z_1 = 1 - i$ и $z_2 = 4 - 5i$.

Решение: Известно, что если z_1, z_2 - корни квадратного уравнения

$z^2 + bz + c = 0$, то указанное уравнение можно записать в виде $(z - z_1)(z - z_2) = 0$. А тогда, учитывая этот факт, имеем, что искомое уравнение можно записать следующим образом:

$$(z - (1 - i))(z - (4 - 5i)) = 0$$

Раскрываем скобки и выполняем операции над комплексными числами:

$$z^2 - (4 - 5i)z - (1 - i)z + (1 - i)(4 - 5i) = 0$$

$$z^2 + z(-4 + 5i - 1 + i) + 4 - 5i - 4i + 5i^2 = 0$$

$z^2 + (-5 + 6i)z - (1 + 9i) = 0$ - искомое квадратное уравнение.

Самостоятельная работа

Вариант №1.

- 1) Решить квадратное уравнение $x^2+2x+5=0$.
- 2) Составить квадратное уравнение по его корням $3-i$ и $3+i$.

Вариант №2.

- 1) Решить квадратное уравнение $x^2-6x+18=0$.
- 2) Составить квадратное уравнение по его корням $5-i$ и $5+i$.

Вариант №3.

- 1) Решить квадратное уравнение $x^2-4x+5=0$.
- 2) Составить квадратное уравнение по его корням $7-i$ и $7+i$.

Вариант №4.

- 1) Решить квадратное уравнение $x^2-10x+41=0$.
- 2) Составить квадратное уравнение по его корням $1-i$ и $1+i$.

Домашняя работа

Изучить и составить конспект, решить квадратное уравнение $3x^2 - 10x + 11 = 0$.