

Севастопольское государственное бюджетное образовательное учреждение
профессионального образования
«Севастопольский медицинский колледж имени Жени Дерюгиной»

СОГЛАСОВАНО

протокол МЦК

от _____ 2024 г. №

Председатель ЦМК

_____ Смирнова З. М.

УТВЕРЖДАЮ

Зам. директора по учебной работе

_____ Полстянко Н.Н.

« _____ » _____ 2024 г.

**Методическая разработка
практического занятия**

Тема” Решение неравенств методом интервалов ”

ОУД 07. Математика

для специальности 34.02.01 «Сестринское дело»

31.02.01 «Лечебное дело»

курс I (база ООО)

Автор Тищенко Е.Ю.

Севастополь 2024 г.

Настоящее методическое пособие предназначено для организации работы на занятии, для оказания помощи в подготовке к занятию, для закрепления полученных знаний, умений и навыков. Пособие содержит теоретический материал для формирования и систематизации знаний студентов. Даны алгоритмы решения примеров и аудиторная самостоятельная работа с примерами разного уровня сложности.

Пояснительная записка

Настоящее пособие предназначено для преподавателя и студентов. Содержание пособия соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальности: «Сестринское дело».

С его помощью можно организовать работу на уроке по изучению материала; работу студентов дома, если эта тема была пропущена в колледже. Пособие служит для оказания помощи в подготовке к занятию, для закрепления полученных знаний, умений и навыков. Пособие будет полезно студентам, как справочный материал, позволяющее быстро восстановить в памяти то, что было изучено ранее.

Примеры дифференцированы по уровням возрастания сложности. Самостоятельная работа составлена таким образом, чтобы студент, впервые столкнувшийся с этой темой, мог выполнить задание без посторонней помощи, т.е. только пользуясь материалом, изложенным в пособии. Это пособие – самоучитель.

Как пользоваться пособием для самостоятельного изучения темы. Сначала следует прочитать теоретическую часть, разобрать примеры и выполнить самостоятельную работу.

Цель: формирование умения решать дробно-рациональные неравенства с помощью метода интервалов.

Тип урока: комбинированное занятие.

Формы обучения: коллективная, самостоятельная.

Теоретическая часть:

Квадратным неравенством называется неравенство вида $ax^2 + bx + c > 0$ или $ax^2 + bx + c < 0$, где $a \neq 0$.

Свойство непрерывных функций:

Если на некотором интервале функция непрерывна и не обращается в нуль, то на этом интервале сохраняет постоянный знак.

На этом свойстве основан метод решения неравенств с одной переменной – метод интервалов.

Любое неравенство можно решить методом промежутков (интервалов). Для нахождения промежутков на числовой прямой отмечают все точки, в которых функция $f(x)$ обращается в нуль или претерпевает разрыв. Эти точки разбивают числовую прямую на несколько промежутков, внутри каждого из которых функция $f(x)$ сохраняет свой знак. Знак может измениться только при переходе через корни сомножителей. Если все корни различны, то при переходе от одного интервала к соседнему знаки будут чередоваться. Поэтому достаточно определить знак на одном каком-нибудь интервале. Если количество одинаковых корней четное число, то при переходе через этот корень знак не будет меняться. Если количество корней число нечетное, то знак будет меняться.

Определение. *Два неравенства называются равносильными, если их множества решений равны.*

Например, неравенства $2x + 7 > 10$ и $2x > 3$ равносильны, так как их множества решений равны и представляют собой промежуток $(\frac{2}{3}; +\infty)$.

Теоремы о равносильности неравенств и следствия из них аналогичны соответствующим теоремам о равносильности уравнений. При их доказательстве используются свойства истинных числовых неравенств [34].

Теорема 3. Пусть неравенство $f(x) > g(x)$ задано на множестве X и $h(x)$ – выражение, определенное на том же множестве.

Тогда неравенства $f(x) > g(x)$ и $f(x) + h(x) > g(x) + h(x)$ равносильны на множестве X .

Из этой теоремы вытекают следствия, которые часто используются при решении неравенств:

1. Если к обеим частям неравенства $f(x) > g(x)$ прибавить одно и то же число d , то получим неравенство $f(x) + d > g(x) + d$, равносильное исходному.

Если какое-либо слагаемое (числовое выражение или выражение с переменной) перенести из одной части неравенства в другую, поменяв знак слагаемого на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.

Теорема 4. Пусть неравенство $f(x) > g(x)$ задано на множестве X и $h(x)$ – выражение, определенное на том же множестве, и для всех x из множества X выражение $h(x)$ принимает положительные значения. Тогда неравенства $f(x) > g(x)$ и $f(x) \cdot h(x) > g(x) \cdot h(x)$ равносильны на множестве X .

Из этой теоремы вытекает следствие: если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ умножить на одно и то же положительное число d , то получим неравенство $f(x) \cdot d > g(x) \cdot d$, равносильное данному [14].

Теорема 5. Пусть неравенство $f(x) > g(x)$ задано на множестве X и $h(x)$ – выражение, определенное на том же множестве, и для всех x из множества X выражение $h(x)$ принимает отрицательные значения. Тогда неравенства $f(x) > g(x)$ и $f(x) \cdot h(x) > g(x) \cdot h(x)$ равносильны на множестве X .

Из этой теоремы вытекает следствие: если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ умножить на одно и то же отрицательное число d и знак неравенства поменять на противоположный, то получим неравенство $f(x) \cdot d > g(x) \cdot d$, равносильное данному [14].

Рассмотрим решение неравенств с одной переменной.

Решим неравенство $5x - 5 < 2x - 16$, и обоснуем все преобразования, которые мы будем выполнять в процессе решения (табл.1).

Преобразование неравенства $5x - 5 < 2x - 16$

Преобразования	Обоснование преобразования
1. Перенесем выражение $2x$ в левую часть, а число -5 в правую, поменяв их знаки на противоположные: $5x - 2x < 16 + 5.$	Воспользовались следствием 2 из теоремы 3, получили неравенство, равносильное данному.
2. Приведем подобные члены в левой и правой частях неравенства: $3x < 21.$	Выполнили тождественные преобразования выражений в левой и правой частях неравенства - они не нарушили равносильности неравенств: данного и исходного.
3. Разделим обе части неравенства на 3: $x < 7.$	Воспользовались следствием из теоремы 4, получили неравенство, равносильное исходному.

Решением неравенства $x < 7$ является промежуток $(-\infty, 7)$ и, следовательно, множеством решений неравенства $5x - 5 < 2x + 16$ является промежуток $(-\infty, 7)$.

Сложности, которые приходится преодолевать в данном случае, связаны с тем, что далеко не всегда возможно привести равносильность одного и того же преобразования однозначно: в некоторых случаях оно может оказаться, например, равносильным, в других равносильность будет нарушена [23].

Решением неравенства называется значение переменной (неизвестного), при котором неравенство превращается в правильное числовое неравенство. *Например*, число 5 является решением неравенства $x^2 - 6x < 0$, поскольку $5^2 - 6 \cdot 5 < 0$.

Решить неравенство – означает найти все его решения или доказать, что их нет. Решениями неравенства является некоторое подмножество

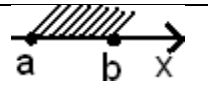
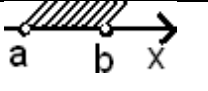
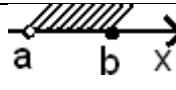
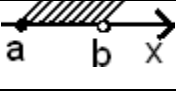
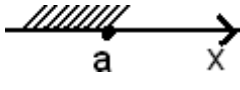
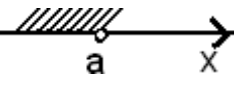
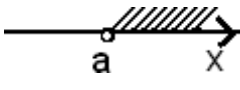
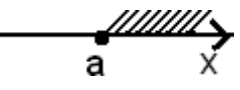
действительных чисел.

Рассмотрим общепринятые обозначения и изображения множеств чисел (табл.2):

Решить неравенство – означает найти все его решения или доказать, что их нет. Решениями неравенства является некоторое подмножество действительных чисел.

Рассмотрим общепринятые обозначения и изображения множеств чисел (табл.2):

Таблица 2

Название	Обозначение	Изображение	Запись в виде неравенства
Числовая прямая	$(-\infty; +\infty), R$		$-\infty < x < +\infty$
Закрытый промежуток (отрезок)	$[a; b]$		$a \leq x \leq b$
Открытый промежуток (интервал)	$(a; b)$		$a < x < b$
Полуоткрытый промежуток	$[a; b)$		$a \leq x < b$
	$(a; b]$		$a < x \leq b$
Бесконечный промежуток (луч)	$(-\infty; a]$		$x \leq a$
	$(-\infty; a)$		$x < a$
	$(a; +\infty)$		$x > a$
	$[a; +\infty)$		$x \geq a$

Если ставится задача найти множество общих решений двух или более неравенств, то говорят, что надо решить **систему неравенств**. Неравенства, входящие в систему, объединяются фигурной скобкой.

Решением системы неравенств называется **число**, которое при его подстановке в систему обращает каждое неравенство в верное числовое неравенство.

Решить систему неравенств – значит найти решения для всей системы, либо доказать, что у данной системы решений нет.

Чтобы решить систему неравенств с одной переменной, надо:

- 1) отдельно решить каждое неравенство;
- 2) найти пересечение найденных решений, отметив решение каждого неравенства на числовой прямой.

Это пересечение и является множеством решений системы неравенств [22].

Основные виды решения линейных неравенств покажем схематично (рис. 5, рис. 6):

Рис. 5.

Схема решения линейного
неравенства $ax + b > 0$

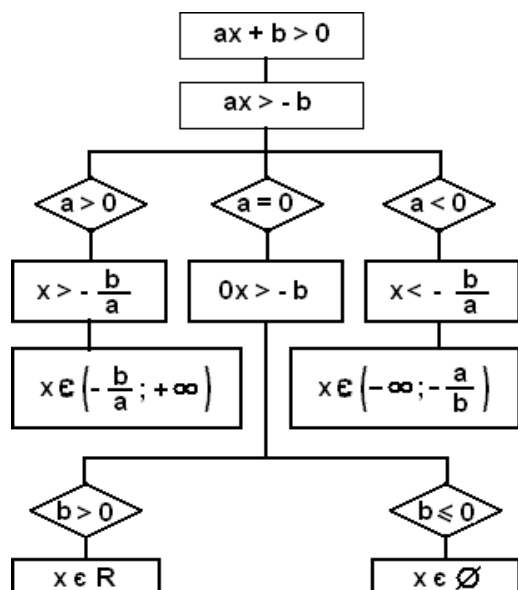
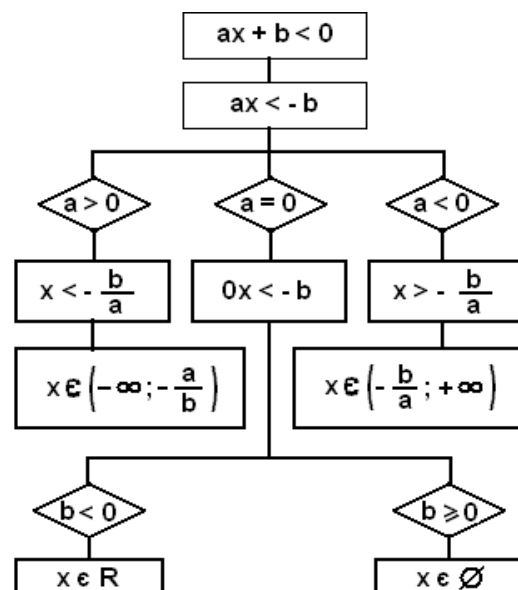


Рис.6.

Схема решения линейного
неравенства $ax + b < 0$



Рассмотрим алгоритмы решения неравенств и систем неравенств, рассматриваемых в курсе основной школы.

Алгоритм решения линейного неравенства.

1. Раскрыть скобки (если нужно);
2. *Неизвестные* перенести в левую часть неравенства, *известные* в правую часть. (При переносе *знаки перед слагаемыми* изменить на противоположные «–» на «+»; «+» на «–»; *знак неравенства сохраняется*);
3. В каждой части *привести подобные слагаемые*, получаем неравенство вида: $ax < b$, $ax > b$, $ax \leq b$, $ax \geq b$;
4. Чтобы найти x , число b , стоящее в правой части разделить на коэффициент при $x(a)$, причём, если $a > 0$, то *знак неравенства сохраняется*, если $a < 0$, то *знак меняется* на противоположный («<» на «>»; «>» на «<»; «≤» на «≥»; «≥» на «≤»);
5. Решение *изобразить* на *числовой прямой* и *ответ записать промежутком* [16].

Алгоритм решения системы неравенств с одной переменной.

1. Решить первое неравенство, найти его решение;
2. Решить второе неравенство, найти решение второго неравенства;
3. Найти пересечение двух множеств значений x [26].

Алгоритм решения неравенств второй степени с одной переменной.

1. *Рассмотреть* функцию, заданную формулой $y = ax^2 + bx + c$ и определить куда направлены ветви параболы ($a > 0$ – вверх, $a < 0$ – вниз);
2. Найти *координаты* точек пересечения параболы с осью X , решив уравнение $y = ax^2 + bx + c$, т.е. определить *нули функции*.
3. *Отметить нули функции* на координатной плоскости, используя обозначения точек при решении неравенств.

4. *Схематично* построить параболу согласно описанию (см. п.1 данного алгоритма).

5. Записать ответ в виде промежутка(промежутков), применяя обозначения скобок [18].

Алгоритм решения неравенств методом интервалов.

1 тип

1. Записать неравенство в виде: $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)>0$;

2. Рассмотреть функцию, заданную формулой:

$$f(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n);$$

3. Выписать *нули функции*: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$;

4. *Отметить нули функции* на числовой прямой, используя соответствующие обозначения точек;

5. Отметить *интервалы* на числовой прямой;

6. Проверить *знаки функции* на каждом полученном интервале;

7. Записать ответ в виде числового промежутка(промежутков), используя соответствующие обозначения скобок.

2 тип

1. Найти область определения функции $y = f(x)$;

2. Найти нули функции $y = f(x)$;

3. На числовую прямую нанести область определения и нули функции. Нули функции разбивают ее область определения на промежутки, в каждом из которых функция сохраняет постоянный знак;

4. Найти знаки функции в полученных промежутках, вычислив значение функции в какой-либо одной точке из каждого промежутка;

5. Записать ответ [18].

Алгоритм решения неравенства с двумя переменными.

1. Строим график функции $y = f(x)$, который разбивает плоскость на две

области.

2. Выбираем любую из полученных областей и рассматриваем в ней произвольную точку. Проверяем выполнимость исходного неравенства для этой точки. Если в результате проверки получается верное числовое неравенство, то заключаем, что исходное неравенство выполняется во всей области, которой принадлежит выбранная точка. приближения, пересечение и объединение множеств, числовые промежутки, решение неравенств с одной переменной, решение систем квадратных и рациональных неравенств с одной переменной, а так же в блоке «Для тех, кто хочет знать больше» показана тема доказательства неравенств.

§1. Свойства числовых неравенств

1. Если $a > b$, то $a - b > 0$; если $a < b$, то $a - b < 0$.
2. Если $a > b$, то $b < a$.
3. $a > b$, $b > c$, то $a > c$; $a < b$, $b < c$, то $a < c$.
1. К двум частям неравенства можно прибавить (или вычесть) равные числа или выражения
2. Два неравенства одинакового смысла можно почленно складывать

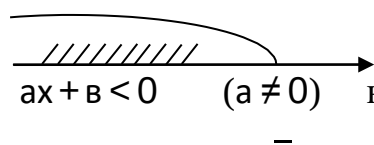
3. Из одного неравенства можно почленно вычесть другое неравенство противоположного смысла, оставляя знак первого неравенства

4. Если две части неравенства умножить или разделить на положительное число, то смысл (знак) неравенства не изменится.

Если две части неравенства умножить или разделить на отрицательное число, то смысл (знак) неравенства изменится на противоположный.

§2. Линейные неравенства

Неравенства вида $ax + b > 0$ или $ax + b < 0$ ($a \neq 0$) называются *линейными* неравенствами.



The diagram shows a horizontal number line with an arrow pointing to the right. A curved line is drawn above the number line, starting from a point on the line and extending to the left. The region to the left of this point is shaded with diagonal lines, representing the solution set for a linear inequality like $ax + b < 0$.

Практическое применение преобразований неравенств рассмотрим **на примерах.**

Решить неравенство:

№ 1. $3(x - 2) - 4(x + 1) < 2(x - 3) - 2$

Упростим левую и правую части неравенства:

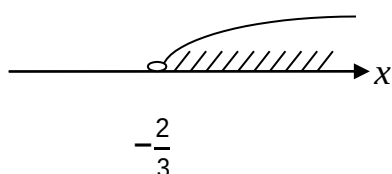
$$3x - 6 - 4x < 2x - 6 - 2$$

$$-x - 10 < 2x - 6 - 2$$

$$-3x < 2$$

$$x > -\frac{2}{3}$$

Множество чисел x , удовлетворяющих конечному неравенству, на числовой оси изображается лучом, а точка $x = -\frac{1}{3}$ не принадлежит этому лучу (отмечается не закрашенной точкой на числовом луче), сам луч изображен штриховкой.



Ответ: $x \in (-\frac{2}{3}; +\infty)$.

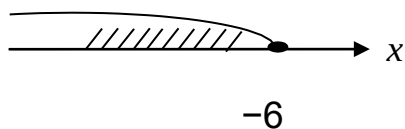
$$\text{№ 2. } 3,5(x + 1) \leq 4x - \frac{2x-1}{2}$$

Умножим обе части неравенства на 2:

$$7x + 7 \leq 8x - 2x + 1$$

$$7x - 6x \leq 1 - 7$$

$$x \leq -6$$



Ответ: $x \in (-\infty; -6]$.

Задачи для самостоятельного решения № 1[45]:

Решите неравенства:

1. $-2x < 4$

2. $x - 8 \leq 3x + 6$

3. $4(x + 1) - 6(2 - x) > 2$

4. $3x - 5(0,6x - 1) < 3$

5. $3x > -9$

$$6. -0,3x < 9,6$$

$$7. 2(x + 3) \geq 2x$$

$$8. 3(x + 2) - 2(5 - x) < 1$$

$$9. 6x - 3(0,2x + 3) > 2x$$

$$10. \frac{x+1}{4} - \frac{4x+1}{5} \leq \frac{7-3x}{10}$$

При объяснении этой темы учителю необходимо обратить внимание на то, что два неравенства одинакового смысла нельзя вычитать друг из друга, так как в результате можно получить как верное, так и неверное неравенство.

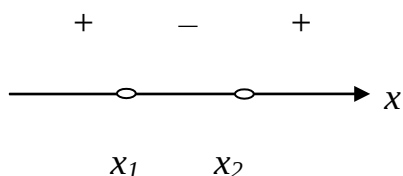
§3. Квадратные неравенства

Неравенства вида $ax^2 + bx + c > 0$ ($0 \neq 0$) называются квадратными.

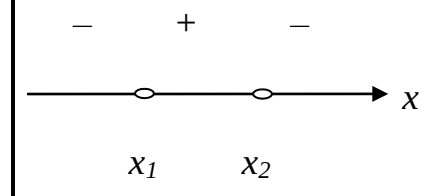
При решении квадратных неравенств используется свойство знакопостоянства квадратичной функции

$$P(x) = ax^2 + bx + c > 0, a \neq 0:$$

$$1. a > 0,$$



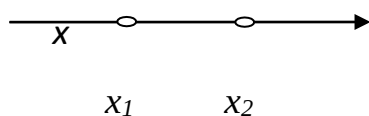
$$2. a < 0,$$



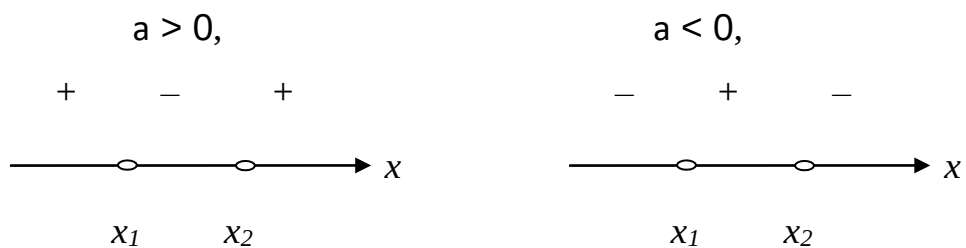
План решения квадратного неравенства:

1. Если $D > 0$, трехчлен имеет два различных корня.

1) Найдите корни квадратного трехчлена, то есть решите квадратное уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$. Нанесите числа x_1 и x_2 на числовую ось:



2) Поставьте знаки квадратного трехчлена в полученных интервалах соответственно знаку коэффициента при x^2 .

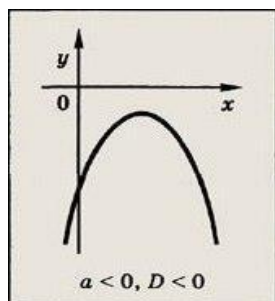
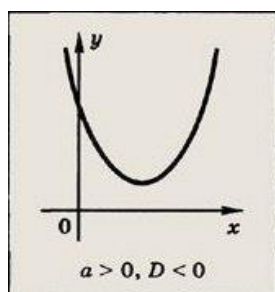


3) Выберите интервалы:

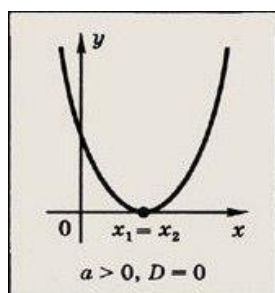
- со знаком «+», если дано неравенство $ax^2 + bx + c > 0$
- со знаком «-», если дано неравенство $ax^2 + bx + c < 0$.

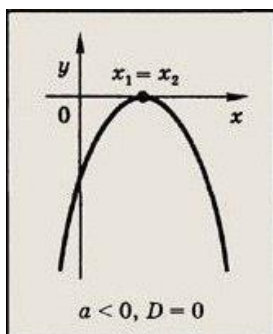
Если данное неравенство нестрогое, то x_1 и x_2 принадлежат выбранным интервалам.

2. Если $D < 0$, трехчлен имеет следующие решения (см. рисунок ниже):



3. Если $D = 0$, трехчлен имеет следующие решения (см. рисунок далее):





Рассмотрим примеры решения квадратных неравенств.

Решите неравенства:

№ 1. $(4 - 3x)(3x + 4) \geq (2 + 9x)(x + 8)$

Раскроем скобки и перенесем все члены неравенства в левую часть

$$16 - 9x^2 - (74x + 9x^2 + 16) \geq 0.$$

Приведем подобные члены: $-18x^2 - 74x \geq 0 : (-2); 9x^2 + 36x \leq 0$

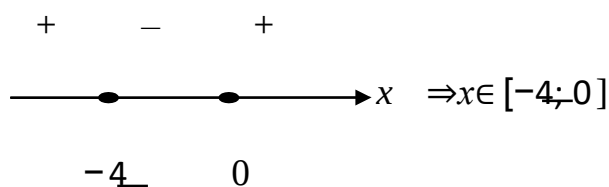
(знак неравенства меняем на противоположный).

Найдем корни квадратного трехчлена:

$$9x^2 + 36x = 0 \Rightarrow \quad \quad \quad -$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -4$$

Нанесем корни на числовую прямую



Ответ: $x \in [-4; 0]$

№ 2. $8x^2 + 11x + 4 \leq 0$

Найдем корни квадратного трехчлена $8x^2 + 11x + 4 = 0$.

$D = -7 < 0$, значит уравнение не имеет действительных корней, коэффициент при x^2 положительный, парабола находится в верхней полуплоскости. Значит, нет таких значений x , при которых данный трехчлен равен нулю или принимает отрицательные значения. Следовательно, решений нет.

Ответ: $\emptyset$

№ 3. $5x^2 + 6x + 2 > 0$

Аналогично предыдущему примеру, найдем корни квадратного трехчлена. Получим $x_1 = -1 < 0$, нет действительных корней. Коэффициент при x^2 положительный, парабола находится в верхней полуплоскости. Значит, $5x^2 + 6x + 2$ принимает только положительные значения. Следовательно, x – любой.

Ответ: $x \in \mathbb{R}$.

§4. Метод интервалов

Если левая часть неравенства с переменной $y > 0$ ($y < 0$) разложена на линейные множители, то есть $(x_1 - x_2)(x - x_2) \dots (x - x_n)$, (1) то такое неравенство можно решить методом интервалов (его иногда называют еще методом промежутков).

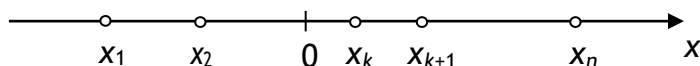
Метод интервалов основан на свойствах функции и заключается в следующем:

Пусть дано неравенство $y > 0$ ($y < 0$), где y имеет вид (1).

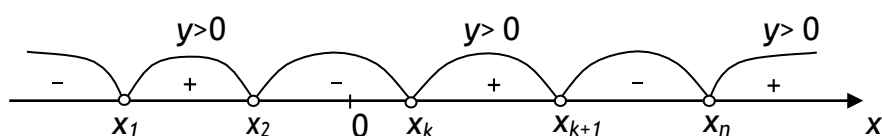
1. Найдем корни уравнения $y = 0$

$$x = -\frac{b_1}{k_1}; x = -\frac{b_2}{k_2}; \dots; x = -\frac{b_n}{k_n}$$

2. Нанесем корни уравнения на числовую прямую



Эти корни разбивают числовую прямую на $n + 1$ промежутков, на каждом из которых левая часть неравенства $y > 0$ ($y < 0$) сохраняет знак (то есть во всех точках промежутка либо $y > 0$, либо $y < 0$), поскольку, по свойствам функции, изменить знак она может только при переходе через корни ее множителей.



3. Найдем знак левой части неравенства на каждом из полученных интервалов. Для этого на каждом из интервалов выберем какое-то

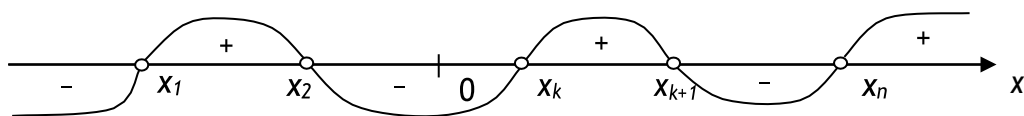
значение

$x = x_0$ и, подставив это значение в левую часть неравенства, определим ее знак (метод пробных точек).

4. Выберем те промежутки, где выполняется это неравенство.

Замечание 1. Неравенство $y \geq 0$ ($y \leq 0$) тоже можно решать методом интервалов. В этом случае корни уравнения $y = 0$, где y имеет вид (1), являются решениями и неравенства.

Замечание 2. В п.2, предложенного выше алгоритма, достаточно было найти знак левой части неравенства на промежутке $(x_n; +\infty)$, а потом учесть, что она меняет знак при переходе от одного промежутка к соседнему и нарисовать «кривую знаков».



Там, где кривая расположена выше оси, левая часть неравенства положительна, а там, где эта кривая расположена ниже оси, левая часть неравенства отрицательна. Однако метод «кривой знаков» годится без дальнейших оговорок лишь в случае, когда все множители в левой части имеют первую степень.

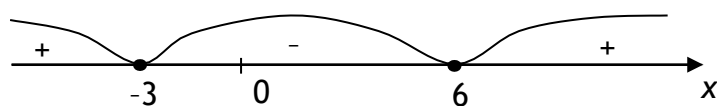
Рассмотрим примеры решения неравенств методом интервалов.

№ 1. $(x - 6)(x + 3) \geq 0$

1. Найдем корни уравнения

$$\begin{aligned} x - 6 = 0 &\Leftrightarrow x = 6 \quad \text{или} \\ (x - 6)(x + 3) = 0 &\Leftrightarrow x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \end{aligned}$$

2. Нанесем полученные корни на числовую прямую, причем, так как неравенство нестрогое и эти корни являются решениями и неравенства, изобразим их черными точками.



3. Найдем знак левой части на каждом из полученных

промежутков 1) $[6; +\infty)$

$$x = 7, y(7) = (7 - 6)(7 + 3) = 1 \cdot 10 = 10 > 0 \Rightarrow y > 0;$$

$$2) [-3; 6]$$

$$x = 0, y(0) = (0 - 6)(0 + 3) = -6 \cdot 3 = -18 < 0 \Rightarrow y < 0;$$

$$3) (-\infty; -3]$$

$$x = -4, y(-4) = (-4 - 6)(-4 + 3) = -10 \cdot (-1) = 10 > 0 \Rightarrow y > 0.$$

4. Нашему неравенству удовлетворяют два

промежутка: $(-\infty; -3]$ и $[6; +\infty)$, поэтому

Ответ: $(-\infty; -3] \cup [6; +\infty)$.

$$\text{№ 2. } -x^2 - 2x + 48 < 0$$

1. Разложим левую часть неравенства на множители

$$-x^2 - 2x + 48 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 48 = 0$$

Для решения этого квадратного уравнения воспользуемся теоремой

Виета.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2, \\ x_1 \cdot x_2 = -48; \end{cases} \Rightarrow x_1 = -8; x_2 = 6.$$

Разложим квадратный трехчлен $-x^2 - 2x + 48$ на множители:

$$-x^2 - 2x + 48 = -(x + 8)(x - 6), \text{ таким образом имеем неравенство:}$$

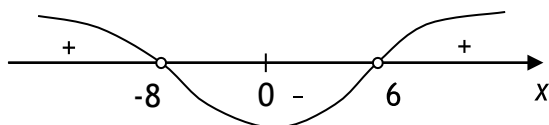
$$-(x + 8)(x - 6) < 0.$$

Умножим обе части неравенства на (-1) , при этом поменяется и знак неравенства: $(x + 8)(x - 6) > 0$

Решим его методом интервалов:

1. корни уравнения $(x + 8)(x - 6) = 0$ мы нашли: $x_1 = -8, x_2 = 6$.

2. нанесем их на числовую прямую



3. определим знак неравенства на промежутке $(6; +\infty)$

$$x = 7, y(7) = (7 + 8)(7 - 6) = 15 \cdot 1 = 15 > 0 \text{ и проведем кривую знаков.}$$

Ответ: $(-\infty; -8) \cup (6; +\infty)$.

$$\text{№ 3. } \frac{(x-1)^2}{5} - \frac{x+4}{6} < \frac{2x-2}{3}$$

1. Приведем неравенство к виду $y < 0$

Для этого, все члены из правой части перенесем в левую с противоположным знаком и приведем все дроби к общему знаменателю

$$\frac{6(x-1)^2 - 5(x+4) - 10(2x-2)}{30} < 0$$

Домножим обе части неравенства на 30 (так как $30 > 0$, знак неравенства не изменится), раскроем скобки и приведем подобные члены

$$6x^2 - 12x + 6 - 5x - 20 - 20x + 20 < 0$$

$$6x^2 - 37x + 6 < 0$$

Разложим левую часть полученного неравенства на множители

$$6x^2 - 37x + 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{37 \pm \sqrt{37^2 - 4 \cdot 6 \cdot 6}}{12} = \frac{37 \pm \sqrt{1225}}{12}$$

$$x_1 = \frac{37 + 35}{12} = \frac{72}{12} = 6; \quad x_2 = \frac{37 - 35}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$6x^2 - 37x + 6 = 6(x-6) \left(x - \frac{1}{6}\right)$$

2. Методом интервалов решим полученное неравенство, которое равносильно первоначальному.

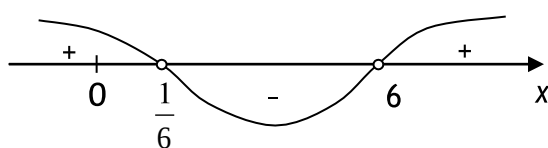
$$6(x-6)\left(x - \frac{1}{6}\right) < 0$$

Нанесем на числовую прямую корни уравнения $y = 0$

Найдем знак левой части на промежутке $(6; +\infty)$:

$$x = 7, \quad y(7) = 6(7-6)\left(7 - \frac{1}{6}\right) = 6 \cdot \frac{41}{6} = 41 > 0 \Rightarrow y > 0.$$

Проведем кривую знаков.



Ответ: $\left(\frac{1}{6}; 6\right)$.

Метод интервалов применим и к неравенствам, левая часть которых – дробь, у которой числитель и знаменатель разложены на линейные множители, например, к неравенству

$$\frac{4(x-5)(2x+6)}{(6-3x)(x+8)} \leq 0$$

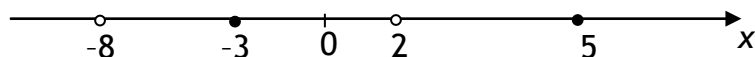
В этом случае находим значения x , которые обращают в нуль и числитель и знаменатель (то есть решаем уравнения $(x-5)(2x+6) = 0$ и $(6-3x)(x+8) = 0$), а затем, действуем по алгоритму приведенному выше, учитывая, что значения x , обращающие в нуль знаменатель не являются решениями неравенства (изображаем их «дырками»).

Решим записанное неравенство:

1. $(x-5)(2x+6) = 0 \Leftrightarrow x = 5$ или $x = -3$;

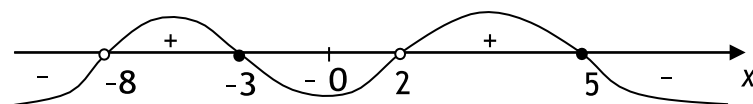
$(6-3x)(x+8) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ или $x = -8$.

2. Нанесем полученные значения x на числовую прямую



3. Определим знак левой части неравенства на интервале $[5; +\infty)$.

$x = 6, \quad y(6) = \frac{4(6-5)(2 \cdot 6+6)}{(6-3 \cdot 6)(6+8)} = \frac{32}{-12 \cdot 14} < 0$ и проведем кривую знаков.



Ответ: $(-\infty; -8) \cup [-3; 2) \cup [5; +\infty)$

№ 4. Найти при каких значениях x выражение имеет числовое значение

$$\sqrt{\frac{-2x-10}{5x+15}}.$$

Так как арифметический квадратный корень вычисляется только из неотрицательного числа, то для того, чтобы выражение имело числовое значение, нужно чтобы выполнялось неравенство $\frac{-2x-10}{5x+15} \geq 0$

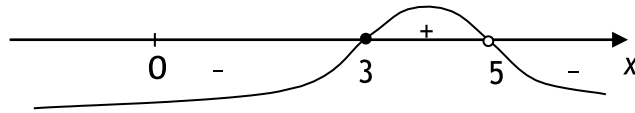
Найдем значения x , при которых это неравенство выполняется, то есть решим это неравенство. Для решения воспользуемся методом интервалов.

1. Решим уравнения

$$-2x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

$$5x + 15 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

2. Нанесем полученные значения на числовую прямую, найдем знак



левой части неравенства на промежутке $(5; +\infty)$, проведем кривую знаков.

$$x = 6, y(6) = \frac{-2 \cdot 6 - 10}{5 \cdot 6 + 15} = \frac{-22}{45} < 0 \Rightarrow \text{на } (5; +\infty) y < 0$$

Решением неравенства является промежуток $[3; 5)$.

Ответ: выражение $\sqrt{\frac{-2x-10}{5x+15}}$ имеет числовое значение при $3 \leq x < 5$.

Задачи для самостоятельного решения № 2 [45]:

Решите квадратное неравенство (в том числе методом интервалов):

1. $(x+5)(x-3) < 0$;

2. $(x-2)(x+1) > 0$;

3. $(x-1)(x-8) \geq 0$;

4. $(x+5)(x+7) \leq 0$;

5. $2x^2 \geq 4x$;

6. $3x^2 \leq 12x$;

7. $x^2 - 16 > 0$;

8. $x^2 - 9x < 0$;

9. $x^2 < 25$;

10. $x^2 > 4$;

11. $x^2 - 3x - 4 \leq 0$;

12. $x^2 + 3x - 4 \geq 0$;

13. $x^2 - 6x + 9 \geq 0$;

14. $x^2 + 10x + 25 \leq 0$;

15. $-x^2 + 2x - 1 \geq 0$;

16. $-x^2 + 4x - 4 < 0$;

17. $4x^2 + 4x + 1 > 0$;

18. $x^2 - 2x + 1 < 0$;

19. $-5x^2 + x - 2 > 0$;

20. $-6x^2 - 2x + 1 < 0$.

При повторении этой темы учителю необходимо сделать акцент на том, что нельзя умножать и делить две части неравенства на 0 или выражение, равное 0, а так же нельзя умножать или делить (сокращать) неравенства на выражение, содержащее переменную величину, так как неизвестен знак этого выражения (и не известно, меняется или нет смысл неравенства).

Важно указать и на то, что квадратный трехчлен можно разложить на множители $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена, $x \neq 0$, $x \geq 0$, а затем решить его методом интервалов.

§5. Системы неравенств

Система неравенств – это несколько неравенств с одной переменной.

Решение системы неравенств – это значение переменной, при котором каждое из неравенств системы обращается в верное числовое неравенство.

Рассмотрим **системы линейных уравнений с одной переменной**, их виды и методы решения.

Система неравенств с одной переменной - совокупность нескольких неравенств с одной и той же переменной.

Система линейных неравенств - совокупность нескольких линейных неравенств.

Чтобы решить систему неравенств, надо каждое неравенство системы решить отдельно, а потом найти решение системы как пересечение множеств решений полученных неравенств.

№ 1. Решите системы неравенств:

$$\begin{cases} 3x \geq 45 \\ 2x + 12 < 6 \end{cases}.$$

Решение: после преобразований получим: $\begin{cases} x \geq 15 \\ x < -3 \end{cases}.$

Перенесем эти значения на числовую прямую. Пересечений данных множеств нет. Следовательно, решений нет.

Ответ: $\emptyset$.

Часто встречаются задания, рассматривающие **двойные неравенства**, например:

№ 2. Решите двойное неравенство: $-4 < 2 + 3x < 7$ и укажите наибольшее и наименьшее целое число, которое является его решением.

Решение: преобразуем левую и правую части неравенства, прибавив к каждой части (-2) (и к центральной части тоже), а далее разделим все части неравенства на коэффициент при неизвестном и получим:

$$-6 < 3x < 5$$

$$-2 < x < 1\frac{2}{3} \quad \text{Отсюда следует, что значения } x \in (-2; 1\frac{2}{3}).$$

Ответ: $x = -1$ – наименьшее целое значение, $x = 1$ – наибольшее целое значение.

Приходится решать системы неравенств, содержащие **дробные неравенства**, но и здесь, путем дополнительных преобразований (приведение к общему знаменателю, умножение каждого слагаемого на общий знаменатель) учащиеся находят требуемое решение без особых затруднений.

Система неравенств может содержать **не два, а три и более неравенств**. Необходимо произвести с ними типичные преобразования, предусмотренные данной темой, что позволит опять прийти к стандартному ответу.

$$x-4 < 8$$

№ 3. Решите систему неравенств: $\begin{cases} 2x + 5 < 13 \\ 3 - x > 1 \end{cases}.$

$$3 - x > 1$$

Решив каждое неравенство, получим новую систему:

$$x < 12$$

$$\{ x < 4$$

$$3 - x > 1$$

Построив числовую прямую с пересечением решений данных неравенств, получим $x < 2$.

Ответ: $x \in (-\infty; 2)$

Доказательство неравенств сводится к тому, что сначала преобразуется его левая или (и) правая часть, далее их сравнивают. Если полученный знак неравенства верен, данное неравенство считают доказанным.

Задания с неравенствами и их системами находят **применение в геометрии**. Например: оцените длину средней линии треугольника ABC , которая параллельна стороне AB , если $10,4 < AB < 10,5$.

При решении задачи, необходимо вспомнить формулу вычисления средней линии треугольника, далее получим новое неравенство:

$$10,4:2 < AB : 2 < 10,5:2$$

$5,2 < AB : 2 < 5,25$. Конечное неравенство будет являться решением задачи.

Задачи для самостоятельного решения № 3 [45]:

Решите системы неравенств:

1. $\begin{cases} x > 3 \\ x \geq 7 \end{cases}$;

2. $\begin{cases} x > -3 \\ x < 6,5 \end{cases}$;

3. $\begin{cases} 2x > 5 \\ -3x \geq 9 \end{cases}$;

4. $\begin{cases} -5x < -1 \\ 6x - 5 < 4x \end{cases}$;

5. $\begin{cases} 5x > 5x - 3 \\ -3x < 2 \end{cases}$;

6. $\begin{cases} 3x + 2 > 0 \\ 5x - 3 \leq 0 \end{cases}$;

$$7. \begin{cases} 5 - 3x \leq 0 \\ 4 - x < 6 \end{cases};$$

$$8. \begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ 4x - 7 \leq 0 \end{cases};$$

$$9. \begin{cases} 12x - 5 \leq 0 \\ 3x + 14 > 0 \end{cases};$$

$$10. \begin{cases} 4x + 2 > 0 \\ 3x - 6 \leq 0 \end{cases};$$

$$11. \begin{cases} 5 + 2x < 0 \\ x - 7 \leq 4 \end{cases};$$

$$12. \begin{cases} -x < 3 \\ 2x \leq 5 \end{cases};$$

$$13. \begin{cases} x^2 + 5x - 6 < 0 \\ -3x \leq 12 \end{cases};$$

$$14. \begin{cases} 3x^2 - 3x - 36 \geq 0 \\ x - 5 < 0 \end{cases}.$$

Во время прохождения этой темы учителю необходимо обратить внимание учащихся на то, что система неравенств с одной переменной может иметь как конечное, так и бесконечное множество решений, и если хотя бы одно из неравенств системы не имеет решений, то и вся система не имеет решений, а пересечение непустого и пустого множеств дает в результате пустое множество.

Итоговая работа для самостоятельного решения [19].

Вариант 1.

$$1. \text{ Решите систему неравенств: } \begin{cases} 3x < 4 \\ -2x > 1,8 \end{cases}.$$

$$2. \text{ Решите неравенство: } 3x - 4 < 2(x + 1).$$

$$3. \text{ Решите неравенство: } x^2 - 5x - 6 \geq 0.$$

4. При каких значениях с выражение $x + 18$ принимает положительные значения?

5. Укажите неравенство, решением которого является любое число.

Запишите номер правильного ответа.

$$1) x^2 - 86 > 0; \quad 2) x^2 + 86 > 0;$$

$$3) x^2 - 86 < 0;$$

$$4) x^2 + 86 < 0.$$

$$6. \text{ Решите систему неравенств: } \begin{cases} (x+2)(x-3) > 0 \\ 2(x+5) - 3(x-7) < 6 \end{cases}.$$

$$7. \text{ Решите систему неравенств: } \begin{cases} x^2 + 7x + 10 < 0 \\ -21 - 7x \leq 0 \end{cases}.$$

$$8. \text{ Решите систему неравенств: } \begin{cases} x^2 \geq 81 \\ x^2 + 10x < 0 \end{cases}.$$

Вариант 2.

$$1. \text{ Решите систему неравенств: } \begin{cases} 2x < 5 \\ -3x > 1,2 \end{cases}.$$

$$2. \text{ Решите неравенство: } 6x + 1 \leq 2x.$$

$$3. \text{ Решите неравенство: } x^2 + 3x - 4 \geq 0.$$

4. При каких значениях k выражение $15 - 2x$ принимает отрицательные значения?

5. Укажите неравенство, решением которого является любое число.

Запишите номер правильного ответа.

$$1) -x^2 + 93 > 0;$$

$$2) -x^2 - 93 > 0;$$

$$3) -x^2 + 93 < 0;$$

$$4) -x^2 - 93 < 0.$$

$$6. \text{ Решите систему неравенств: } \begin{cases} (x+5)(x-6) \geq 0 \\ 6(x+1) < 7x - 3(2-x) \end{cases}.$$

$$7. \text{ Решите систему неравенств: } \begin{cases} 2x^2 + 3x - 20 > 0 \\ x + 5 \geq 0 \end{cases}.$$

$$8. \text{ Решите систему неравенств: } \begin{cases} x^2 \leq 16 \\ x^2 + 5 > 0 \end{cases}.$$

Справочные материалы представлены в виде алгоритма решения полных и неполных квадратных уравнений.

Рекомендации для учащихся включают в себя советы при выполнении заданий и повторении темы.

Учитель проверяет правильность написания самостоятельных работ учащихся с помощью ключей (ответов), представленных далее.

Ответы к заданиям для самостоятельного решения.

Задачи для самостоятельного решения № 1

1. $x > -2$ 2. $x \geq -7$ 3. $x > 1$ 4. нет решений 5. $x > -3$
6. $x > -32$ 7. $x \geq 8$ 8. любое число 9. $x < 1$ 10. $x > 2\frac{11}{17}$

Задачи для самостоятельного решения № 2

1. $-5 < x < 3$ 2. $x < -1, x > 2$ 3. $x \leq 1, x \geq 8$ 4. $-7 \leq x \leq -5$
5. $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$ 6. $[0; 4]$ 7. $x < -4, x > 4$ 8. $0 < x < 9$
9. $-5 < x < 5$ 10. $x < -2, x > 2$ 11. $-1 \leq x \leq 4$ 12. $x \leq -4, x \geq 1$
13. любое число 14. -5 15. 1 16. $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$
17. $x < -0,5, x > -0,5$ 18. нет решений 19. нет решений 20. любое
число

Задачи для самостоятельного решения № 3

1. $x \geq 7$ 2. $-3 < x < 6,5$ 3. $x \leq -3$ 4. $0,2 < x < 2,5$ 5. $x > -\frac{2}{3}$
6. $(-\frac{2}{3}; 0,6]$ 7. $[\frac{5}{3}; +\infty)$ 8. $(1\frac{1}{2}; 1\frac{3}{4}]$ 9. $(-\frac{14}{3}; \frac{5}{12}]$ 10. $(-\frac{1}{2}; 2]$

Итоговая работа для самостоятельного решения

Вариант 1. 1. $x < -0,9$ 2. $x < 6$ 3. $x \leq -1, x \geq 6$ 4. При $x > -18$

5. 2 6. $(25; +\infty)$ 7. $[-3; -2)$ 8. $(-10; -9]$

Вариант 2. 1. $x > -0,3$ 2. $x < -12$ 3. $-4 \leq x \leq 2$ 4. При $x > 7,5$

5. 4 6. $[6; +\infty)$ 7. $[-5; -4) \cup (2, 5; +\infty)$ 8. $(0; 4]$

Пример 1.

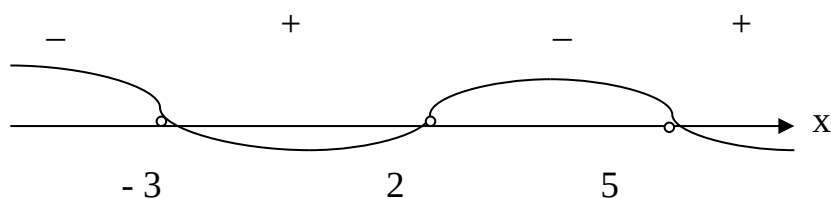
На примере неравенства $(x+3)(x-2)(x-5) > 0$ рассмотрим этот метод.

$$f(x) = (x+3)(x-2)(x-5),$$

$$(x+3)(x-2)(x-5) = 0,$$

$$x = -3, x = 2, x = 5.$$

Эти точки разбивают всю числовую прямую на промежутки внутри каждого из которых функция сохраняет свой знак.



Берем любое число в правом крайнем интервале:

$$f(6) = (6+3)(6-2)(6-5) > 0,$$

$$f(x) > 0 \text{ при } x \in (-3; 2) \cup (5; +\infty).$$

Ответ: $(-3; 2) \cup (5; +\infty)$.

Пример 2.

Решить неравенство $\frac{x^2-1}{x^2-5x+6} \geq 0$.

Функция $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-5x+6}$ непрерывна в каждой точке своей области определения. Найдем область определения функции:

$$x^2 - 5x + 6 \neq 0$$

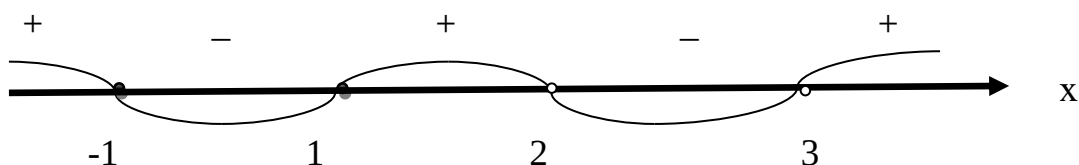
$$x \neq 2; \quad x \neq 3.$$

Найдем нули функции: $x^2 - 1 = 0$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1.$$

Точки -1;1;2;3 разбивают числовую прямую на 5 промежутков, в каждом из которых функция $f(x)$ непрерывна, не обращается в нуль и сохраняет свой знак.



Берем любую точку в правом крайнем интервале.

$f(4) = \frac{4^2-1}{4^2-5 \cdot 4+6} = \frac{15}{2} > 0$, значит в этом интервале +, а в лево будет чередование.

$$f(x) \geq 0 \text{ при } x \in (-\infty; -1] \cup [1; 2) \cup (3; +\infty).$$

Ответ: $(-\infty; -1] \cup [1; 2) \cup (3; +\infty)$.

Пример 3:

Решить неравенство:

$$\frac{x^2-5x}{2x+1} < 0$$

$$f(x) = \frac{x^2-5x}{2x+1}$$

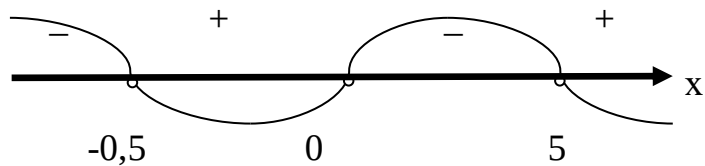
$$2x + 1 \neq 0$$

$$x \neq -0,5$$

$$x^2 - 5x = 0$$

$$x(x - 5) = 0$$

$$x = 0 \text{ или } x = 5$$



$$f(6) = \frac{6^2 - 5 \cdot 6}{2 \cdot 6 + 1} > 0,$$

$$f(x) < 0 \text{ при } x \in (-\infty; -0.5) \cup (0; 5).$$

Ответ: $(-\infty; -0.5) \cup (0; 5)$.

Пример 4.

Решить неравенство:

$$\frac{(x+1)^3 \cdot (x-2)^2}{(x-1)^4} \geq 0.$$

$$f(x) = \frac{(x+1)^3 \cdot (x-2)^2}{(x-1)^4}$$

$$(x-1)^4 \neq 0,$$

$x \neq 1$, четыре корня.

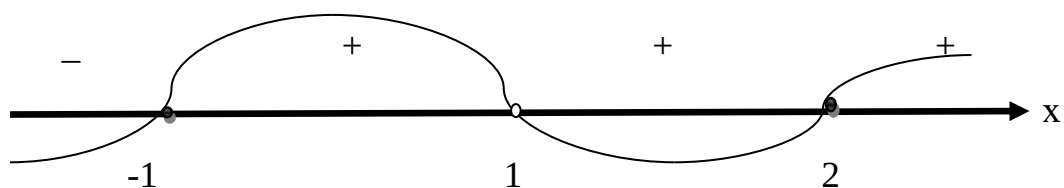
$$(x+1)^3 \cdot (x-2)^2 = 0,$$

$$(x+1)^3 = 0,$$

$x = -1$, три корня,

$$(x-2)^2 = 0,$$

$x = 2$, два корня.



$$f(3) = \frac{(3+1)^3(3-2)^2}{(3-1)^4} = \frac{64 \cdot 1}{16} = 4 > 0$$

При переходе через точки 2 и 1 знаки не меняются, т.к. в этих точках четное количество корней, а в точке -1 знак меняется, т.к. в этой точке три корня.

$$f(x) \geq 0 \text{ при } x \in [-1; 1) \cup (1; +\infty).$$

Ответ: $[-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

Самостоятельная работа для оценки усвоения знаний.

(варианты распределяются по списку 1,11,21; 2,12,22 и т.д.)

Вариант 1

$$1) \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 1} > 0$$

$$2) \frac{54 - 6x^2}{4x + 7} < 0$$

$$3) \frac{(x+5)(x-7)}{3x-1} \geq 0$$

$$4) \frac{4x - x^2}{3 + 2x} \leq 0$$

$$5) \frac{(x+3)^2(x-2) \cdot x^3}{x+4} < 0$$

Вариант 2

$$1) \frac{8x^2 - 2x - 1}{x} < 0$$

$$2) \frac{2x^2 - 1}{x - 8} > 0$$

$$3) \frac{(x-5)(3x-1)}{9-x} \geq 0$$

$$4) \frac{7x + x^2}{12x - 1} \leq 0$$

$$5) \frac{x^2(x-2)(x+3)^3}{x+1} > 0$$

Вариант 3

$$1) \frac{2x^2+5x-3}{x-3} > 0$$

$$2) \frac{x^2-25}{6x+1} < 0$$

$$3) \frac{(x+10)(2x-3)}{2x} \geq 0$$

$$4) \frac{x(x+2)}{1-2x} \leq 0$$

$$5) \frac{(2-x)(3x-4)^2 \cdot x^3}{x+1} < 0$$

Вариант 4

$$1) \frac{x^2-14x+48}{x+7} < 0$$

$$2) \frac{9x^2-1}{x-6} > 0$$

$$3) \frac{(x-11)(3x-8)}{6-x} \geq 0$$

$$4) \frac{2x+8x^2}{2x-1} \leq 0$$

$$5) \frac{(4+x)(x-5)^2(x+2)^3}{x+3} > 0$$

Вариант 5

$$1) \frac{4x^2-16x+7}{3(x+2)} < 0$$

$$2) \frac{3x^2-12}{1-11x} > 0$$

$$3) \frac{(x+11)(2x-5)}{3x} \leq 0$$

$$4) \frac{3x^2+4x}{9-x} \geq 0$$

$$5) \frac{(4+x)(x-5)^2 \cdot x^3}{x+2} < 0$$

Вариант 6

$$1) \frac{x^2-3x+2}{6+3x} > 0$$

$$2) \frac{8-32x^2}{x-10} < 0$$

$$3) \frac{(x-5)(2x+7)}{4-x} \leq 0$$

$$4) \frac{16x^2-x}{12-x} \geq 0$$

$$5) \frac{(x^2-4)(x+1)^4 \cdot x}{2x+5} > 0$$

Вариант 7

$$1) \frac{(x-11)(3x-8)}{4-x} \geq 0$$

$$2) \frac{3x^2+4x-4}{8+15x} < 0$$

$$3) \frac{2x+8x^2}{2x-1} > 0$$

$$4) \frac{9-25x^2}{x+4} \leq 0$$

$$5) \frac{(2-x)^3(4x+1) \cdot x^3}{x+3} < 0$$

Вариант 8

$$1) \frac{(x+11)(2x-5)}{3x} < 0$$

$$2) \frac{8x^2-2x-1}{x} > 0$$

$$3) \frac{3x^2-12}{1-11x} \leq 0$$

$$4) \frac{11x^2-x}{2+x} \geq 0$$

$$5) \frac{(4-x)^4 \cdot x^3(x-1)}{2x+1} > 0$$

Вариант 9

$$1) \frac{x^2-14x-15}{10-4x} > 0$$

$$2) \frac{(x-5)(3x-1)}{9-x} \leq 0$$

$$3) \frac{3x+12x^2}{x+4} \geq 0$$

$$4) \frac{4-x^2}{2x-3} < 0$$

$$5) \frac{(2x+3)(x+3)^2 \cdot x^3}{x-2} < 0$$

Вариант 10

$$1) \frac{x-4x^2}{x-1} > 0$$

$$2) \frac{x^2-19x+84}{2(x-5)} \leq 0$$

$$3) \frac{(x-6)(4x+7)}{8-x} \geq 0$$

$$4) \frac{3x^2-27}{2x+7} < 0$$

$$5) \frac{x(x-1)(x+3)^2}{2-x} > 0$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Алгебра*: учебник для 7-х классов общеобразовательных учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под. ред. С.А. Теляковского.–М. : Просвещение, 2008. – 240 с.
2. *Алгебра. 7 класс: В двух частях. Ч. 2: Задачник для общеобразовательных учреждений* / А.Г. Мордкович, Л.А. Александрова, Т.Н. Мишустина, Е.Е. Тульчинская; под. ред. А.Г. Мордковича.– М. : Мнемозина, 2008. – 223 с.
3. *Алгебра*: учебник для 8-х классов общеобразовательных учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под. ред. С.А. Теляковского.–М. : Просвещение, 2005. – 238 с.
4. *Алгебра*: учебник для 8 класса общеобразовательных учреждений/ С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников и др. – 3-е изд.– М. : Просвещение, АО «Московские учебники», 2006. – 287 с.
5. *Алгебра. 8 класс. В 2ч. Ч.1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (повышенный уровень)/* А.Г. Мордкович, Н.П. Николаев. – 10-е изд., доп. – М.: Мнемозина, 2013. – 256 с.
6. *Алгебра. 8 класс. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений/* Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. – 15-е изд., стереотип. – М. : Дрофа, 2013. – 254 с.
7. *Алгебра. 8 класс. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений/* Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин и др. – 18-е изд. – М. : Просвещение, 2011. – 255 с.
8. *Алгебра. 8 класс. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений/* Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков и др. – 17-е изд. – М. : Просвещение, 2009. – 271 с.
9. *Алгебра. 8 класс. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений/* Н.Я. Виленкин, А.Н. Виленкин, Г.С. Сурвилло и др. – 9-е изд.,

дораб. – М. : Просвещение, 2010. – 303 с.

10. *Алгебра* 8 класс: В двух частях. Ч. 2: Задачник для общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, Л.А. Александрова, Т.Н. Мишустина, Е.Е. Тульчинская; под. ред. А.Г. Мордковича.— М. : Мнемозина, 2008. – 255 с.

11. *Алгебра*: учебник для 9-х классов общеобразовательный учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под. ред. С.А. Теляковского.—М. : Просвещение, 2008. – 272 с.

12. *Алгебра. Нестандартные задачи. Экспресс-репетитор* для подготовки к ГИА. 9 класс / Г. В. Сычева, Н.Б. Гусева, В.А. Гусев – М. : Астрель, 2010. – 128 с.

13. *Алгебра. Сборник заданий* для подготовки к государственной итоговой аттестации в 9 классе. ГИА / / Кузнецова Л.В., Суворова С.Б., Бунимович Е.А., Колесникова Т.В., Рослова Л.О./М. : Просвещение, 2011 – 147 с.

14. *Больше - меньше* (неравенства множеств) / Г. П. Шалаева — М. : АСТ, Слово, 2010.— 64 с.

15. *Вавилов В.В.* Задачи по математике. Уравнения и неравенства / В.В. Вавилов. – М. : Книга по Требованию, 2012. – 237 с.

16. *Вавилов В.В.* Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Справочное пособие / В.В. Вавилов, И.И. Мельников, С.Н. Олехник, и др. – М. : Машиностроение, 1997. – 240 с.

17. *ГИА-9класс. Математика. Тематические тестовые задания* / Л.Д. Лаппо, М.А. Попов /М. : Экзамен, 2011. – 98 с.

18. *Гилемханов Р.Г.* Об одном способе решения неравенства второй степени с одной переменной //Математика в школе. – 2014. – №8. – с. 69

19. *Государственная итоговая аттестация* выпускников 9 классов в новой форме. Математика / Кузнецова Л.В., Суворова С.Б., Бунимович Е.А., Колесникова Т.В., Рослова Л.О./М. : Интеллект-Центр, ФИПИ, 2011. – 189 с.

20. *Гусев В.А.* Теория и методика обучения математике: психолого-

педагогические основы / В.А. Гусев. – М. : Бином, 2013. – 456 с.

21. *Давыдов В.В. и др. Обучение математике/ В.В. Давыдов, С.Ф. Горбов и др.* – М. : Мирос, 1994. – 192 с.
22. *Денищева Л.О. Теория и методика обучения математике в школе: Учебное пособие / Л.О. Денищева, А.Е. Захарова, И. Зубарева.* – М. : Бином, 2011. – 247 с.
23. *Денищева Л.О. Теория и методика обучения математике в школе: Учебное пособие / Л.О. Денищева, А.Е. Захарова, И. Зубарева.* – М. : Бином, 2014. – 247 с.
24. *Задачи по математике. Уравнения и неравенства / В.В. Вавилов и др.* – М. : Физматлит, 2010. – 240 с.
25. *Имранов Б. О системе изучения неравенств //Математика в школе.* – 2012. – №7. – с. 38
26. *Козловский С.Н. Методика обучения математике: Учебное пособие / С.Н. Козловский.* – СПб.: Лань, 2015. – 512 с.
27. *Кипнис И.М. Задачи на составление уравнений и неравенств: Пос. для учит-й/ И.М. Кипнис.* – М. : Просвещение, 1980. – 68 с.
28. *Левитас Г.Г. Современный урок математики. Методика преподавания/ Г.Г. Левитас.* – М. : Высшая школа, 1989. – 88 с.
29. *Математика. 9 класс. Неравенства. Системы неравенств. Экспресс-репетитор для подготовки к ГИА / Г.В. Сычева, Н.Б. Гусева, В.А. Гусев* – М. : Астрель, 2012 . – 128 с.
30. *Математика. Уравнения и неравенства. Экспресс-репетитор для подготовки к ЕГЭ / И.С. Слонимская, Л. И. Слонимский* – М. : Астрель, 2010 – 160 с.
31. *Математика. 9 класс. Экспериментальная экзаменационная работа / Л.Д. Лаппо, М.А. Попов /М. : Экзамен, 2011. – 74 с.*
32. *Медведева Т.В. Психолого-педагогические основы обучения математике. Теория, методика, практика / Т.В. Медведева.* – М. : Бином. Лаборатория знаний, 2011. – 204 с.

33. *Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика*: Уч. пос. для студ. пед. инст-в по спец.2104 «Математика» и 2105 «Физика» / А.М. Блох, Е.С. Канин и др. Сост. Е.С. Черкасов, А.А. Столяр. – М.: Просвещение, 1985. – 336 с.

34. *Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика*: Уч. пос. для студ. пед. инст-в по физ-мат. спец-м/ А. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др. Сост. В.И. Мишин. – М. : Просвещение, 1987. – 416 с.

35. *Методика преподавания математики в средней школе*/ В.А. Ованесян и др. – М. : Просвещение, 1980. – 368 с.

36. *Мордкович А.Г.* Алгебра 7 класс: В двух частях. Ч. 1: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – М. : Мнемозина, 2008. – 160 с.

37. *Мордкович А.Г.* Алгебра 7 класс: В двух частях. Ч. 2: Задачник для общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, Т.Н. Мишустина, Е.Е. Тульчинская. – М. : Мнемозина, 2008. –223 с.

38. *Мордкович А.Г.* Алгебра 8 класс: В двух частях. Ч. 1: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – М. : Мнемозина, 2008. – 215 с.

39. *Мордкович А.Г.* Алгебра 8 класс: В двух частях. Ч. 2: Задачник для общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, Т.Н. Мишустина, Е.Е. Тульчинская. – М. : Мнемозина, 2008. –255 с.

40. *Мордкович А.Г.* Алгебра: учебник для 9 кл. общеобразоват. учреждений/ А.Г.Мордкович. – 4-е изд. – М. :Мнемозина, 2002. – 192 с.

41. *Мордкович А.Г.* Алгебра: задачник для 9 кл. общеобразовательных учреждений/ А.Г. Мордкович. – 4-е изд. – М. :Мнемозина, 2002. – 143 с.

42. *Мордкович А.Г.* Алгебра 9 класс: В двух частях. Ч. 1: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – М. : Мнемозина, 2004. – 192 с.

43. *Мордкович А.Г.* Алгебра 9 класс: В двух частях. Ч. 2: Задачник для общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, Т.Н. Мишустина, Е.Е. Тульчинская. – М. : Мнемозина, 2004. –144 с.

44. *Никольский С.М.* Алгебра: учебник для 9 кл. общеобразоват. учреждений/ С.М.Никольский. – 5-е изд.– М.: Просвещение, 2008.– 255 с.

45. *Открытый банк заданий ОГЭ по математике 2019.* – Режим доступа: <http://mathege.ru/or/ege/Main>. – Темы № 36–41, 48–53 (тест).

46. *Садовничий Ю.В.* ЕГЭ 2015. Математика. Решение уравнений и неравенств. Преобразование алгебраических выражений. Практикум / Ю.В. Садовничий. – М. : Экзамен, 2015. – 128 с.

47. *Садовничий Ю.В.* ЕГЭ. Практикум по математике. Решение уравнений и неравенств. Преобразование алгебраических выражений/ Ю.В. Садовничий. – М. : Экзамен, 2014. – 128 с.

48. *Сборник заданий для проведения письменного экзамена по алгебре за курс основной школы. 9 класс / Кузнецова Л.В., Бунимович Е.А., Пигарев Б.П., Суворова С.Б.* – М. : Дрофа, 2010 . – 148 с.

