

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Министерство образования Иркутской области
Департамент образования города Иркутска
МБОУ г. Иркутска ВСОШ №1

Методическое пособие
«Простейшие уравнения»

Глинский Игорь Юрьевич
учитель математики
I квалификационной категории
МБОУ г. Иркутска ВСОШ №1

Иркутск
2025

Содержание

	Введение.....	3
1	Линейные уравнения.....	5
2	Квадратные уравнения.....	7
3	Неполные квадратные уравнения.....	9
4	Кубические уравнения.....	11
5	Рациональные уравнения.....	14
6	Иррациональные уравнения.....	18
7	Показательные уравнения.....	22
8	Логарифмические уравнения.....	26
9	Тригонометрические уравнения.....	31
10	Системы уравнений.....	37
	Заключение.....	42
	Список использованных источников.....	43

Введение

Уравнения являются одним из фундаментальных понятий математики, ее универсальным языком и ключевым инструментом для описания и исследования количественных отношений в окружающем мире. Изучение уравнений способствует формированию абстрактного мышления, развивает логику, алгоритмическую культуру и навыки аналитического подхода к решению разнообразных практических и теоретических задач.

Владение методами решения уравнений и их системами – неотъемлемая часть базовой математической грамотности. Уравнения служат связующим звеном между алгеброй, геометрией и началами математического анализа, позволяя интегрировать знания из различных разделов. В современном мире эти навыки находят прямое применение в программировании, инженерии, экономике, физике и многих других областях.

Особую актуальность теме придает ее значимость в рамках государственной итоговой аттестации. Задания на решение уравнений занимают центральное место в структуре Единого Государственного Экзамена (ЕГЭ) по математике, проверяя умения выпускников работать как с базовыми, так и с более сложными математическими моделями.

Цель данного пособия – систематизировать знания и сформировать у обучающихся прочные умения и навыки в решении различных типов уравнений, обеспечить их теоретическую и практическую готовность к выполнению экзаменационных заданий, а также к дальнейшему обучению в вузах.

Для достижения этой цели в пособии решаются следующие **задачи**:

1. **Систематизация знаний:** Представить четкую классификацию типов уравнений (линейные, квадратные, рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические) и методов их решения.
2. **Отработка алгоритмов:** Обеспечить поэтапное освоение стандартных и нестандартных методов решения (разложение на множители, замена переменной, использование свойств функций и т.д.).
3. **Формирование навыка анализа:** Научить корректно определять область допустимых значений (ОДЗ), проводить равносильные преобразования, отбирать корни и грамотно записывать ответ.
4. **Развитие гибкости мышления:** Показать взаимосвязь различных тем через текстовые задачи, сводящиеся к уравнениям, и через переход от уравнений к исследованию функций.
5. **Целенаправленная подготовка к ЕГЭ:** Обеспечить детальную проработку заданий экзаменационного формата с акцентом на критерии оценивания.

Тема «Уравнения» напрямую представлена в КИМах ЕГЭ по математике на обоих уровнях:

- **На базовом уровне** (экзамен для получения аттестата) уравнение является основой для **задания №17**. Это текстовая задача (чаще всего на проценты, движение, работу, сплавы или смеси), математическая модель которой представляет собой линейное, квадратное или простое рациональное уравнение. Успешное выполнение этого задания проверяет умение применять математику в жизненных ситуациях.

- **На профильном уровне** (экзамен для поступления в вузы) тема представлена более широко и вариативно:
 - **Задание №6** (первая часть, с кратким ответом) напрямую посвящено решению **простейших уравнений и неравенств**. Здесь могут встретиться показательные, логарифмические, иррациональные, рациональные или тригонометрические уравнения базового уровня сложности. Это задание направлено на проверку знания стандартных алгоритмов.

Некоторые текстовые задачи также сводятся к составлению и решению уравнений или систем уравнений, но повышенной сложности.

Таким образом, уверенное владение методикой решения уравнений – это **гарантия получения значительной доли баллов** на экзамене, основа для успешного выполнения многих других заданий и ключевой фактор достижения высокого результата.

Структура пособия построена по принципу «от простого к сложному». Каждая глава посвящена конкретному типу уравнений: дается необходимая теория, разбираются типовые примеры, особое внимание уделяется характерным ошибкам и «подводным камням». Завершает каждую тему блок тренировочных упражнений, включающих задачи в формате ЕГЭ базового и профильного уровней.

1. Линейные уравнения

Линейное уравнение — это самое простое уравнение, в котором переменная (обычно x) встречается только в первой степени. Его можно представить как весы, которые нужно уравновесить.

Общий вид линейного уравнения с одной переменной: $ax + b = 0$, где x — неизвестная переменная (корень уравнения, который мы ищем). a и b — числа (коэффициенты). a называется коэффициентом при переменной, b — свободным членом.

Важно: $a \neq 0$. Если $a = 0$, уравнение перестает быть линейным относительно x (оно становится уравнением вида $b = 0$).

Цель решения: Найти значение переменной x , при котором равенство становится верным. Это значение называется корнем уравнения.

Решение любого линейного уравнения сводится к двум основным шагам: **упростить и разделить**.

Шаг 1: Упрощение. Используя тождественные преобразования, нужно привести уравнение к **стандартному виду** $ax + b = 0$.

Для этого:

1. Раскрыть скобки (если они есть).
2. Перенести все слагаемые с x в одну часть уравнения (обычно в левую), а все числа — в другую (в правую). **Помните:** при переносе через знак « $=$ » знак слагаемого меняется на противоположный (+ на - и наоборот).
3. Привести подобные слагаемые (сложить/вычесть все x и все числа по отдельности).

Шаг 2: Решение. Когда уравнение приняло вид $ax + b = 0$ (или просто $ax = -b$), применяем ключевую формулу:

$$x = \frac{-b}{a}$$

По сути, чтобы найти x , нужно **свободный член (b) с противоположным знаком разделить на коэффициент при x (a)**.

Пример 1 (Простой). Решите уравнение: $7x - 11 = 3x + 5$

Решение:

1. Переносим слагаемые с x влево, числа — вправо, меняя знаки:

$$7x - 3x = 5 + 11$$

2. Приводим подобные:

$$4x = 16$$

3. Делим обе части уравнения на коэффициент при x (на 4):

$$\frac{4x}{4} = \frac{16}{4}$$
$$x = 4$$

4. **Ответ: $x = 4$**

Пример 2 (Со скобками). Решите уравнение: $5(x - 4) = 2x + 8$

Решение:

1. Раскрываем скобки:

$$5x - 5 \cdot 4 = 2x + 8$$
$$5x - 20 = 2x + 8$$

2. Переносим:

$$5x - 2x = 8 + 20$$

3. Приводим подобные:

$$3x = 28$$

4. Делим на коэффициент 3:

$$x = \frac{28}{3}$$

5. **Ответ:** $x = \frac{28}{3}$ (или $x = 9\frac{1}{3}$ в виде смешанной дроби).

Пример 3 (С дробями). Решите уравнение: $\frac{(2x + 1)}{3} = 5$

Решение:

1. Это уравнение — частный случай $ax + b = 0$. Избавимся от знаменателя.
Умножим **обе части** уравнения на 3:

$$3 \cdot \frac{(2x + 1)}{3} = 3 \cdot 5$$

$$2x + 1 = 15$$

2. Переносим число 1 вправо:

$$2x = 15 - 1$$

$$2x = 14$$

3. Делим на 2:

$$x = \frac{14}{2}$$

$$x = 7$$

4. **Ответ:** $x = 7$

Типичные ошибки

- **Ошибка знаков при переносе.** Самая частая ошибка. Запоминаем: переносим — меняем знак.
- **Неправильное раскрытие скобок.** Не забываем умножать знак перед скобкой на каждое слагаемое внутри. Например: $-(2x - 5) = -2x + 5$.
- **Путаница с дробями.** Умножать на общий знаменатель нужно **всю левую и всю правую часть** целиком.
- **Проверка (особенно в задачах).** Всегда подставляйте найденный корень в исходное уравнение или проверяйте логику задачи.

Задачи для самостоятельного решения

1. $2 + 9x = 4x + 3$

2. $8(6 + x) + 2x = 8$

3. $-3 + 4(-7 + 5x) = 9x - 9$

4. $1 + 8(3x + 7) = 9$

5. $7x - 15 = 4x + 3$

2. Квадратные уравнения

Квадратное уравнение — это уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x — неизвестная переменная.

a, b, c — коэффициенты, причем a, b, c — любые числа, но $a \neq 0$ (если $a = 0$, уравнение превращается в линейное).

ax^2 — квадратичный член,

bx — линейный член,

c — свободный член.

Цель решения: Найти все значения x (они называются корнями уравнения), при которых равенство становится верным. Квадратное уравнение может иметь два, один корень или не иметь корней вообще.

Существует 2 способа решения.

Способ 1. Решение с помощью дискриминанта (универсальный способ).

Это основной и самый надежный метод.

1. **Находим Дискриминант (D)** — "различитель" корней. Формула:

$$D = b^2 - 4ac$$

2. **Анализируем дискриминант:**

- Если $D > 0$, уравнение имеет **два различных корня**:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ и } x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

- Если $D = 0$, уравнение имеет **один корень** (иногда говорят "два совпадающих корня"):

$$x = \frac{-b}{2a}$$

- Если $D < 0$, **действительных корней нет** (корни являются комплексными числами, которые в школьном курсе базового и профильного ЕГЭ не рассматриваются).

Пример: Решить уравнение $2x^2 - 5x - 3 = 0$.

1. $a = 2, b = -5, c = -3$.
2. $D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 + 24 = 49$.
3. $D > 0 \rightarrow$ два корня.
4. $x_1 = \frac{5 + \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{5+7}{4} = \frac{12}{4} = 3$
5. $x_2 = \frac{5 - \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{5-7}{4} = \frac{-2}{4} = -0.5$

Ответ: 3; -0.5

Способ 2. Теорема Виета (только для приведенных уравнений).

Если квадратное уравнение **приведенное** (т.е. $a = 1$, вид $x^2 + px + q = 0$), его корни можно быстро найти подбором, используя теорему Виета:

- **Сумма корней равна второму коэффициенту с противоположным знаком:**

$$x_1 + x_2 = -p$$

- **Произведение корней равно свободному члену:**

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

Пример: Решить уравнение $x^2 - 7x + 10 = 0$.

1. $p = -7, q = 10$.

2. Подбираем два числа, сумма которых равна 7, а произведение 10. Это числа 2 и 5.
3. **Ответ: 2; 5.**

Типичные ошибки

1. **Неверное определение коэффициентов.** В уравнении $-x^2 + 3x - 2 = 0$ коэффициенты: $a = -1$, $b = 3$, $c = -2$. Не теряйте знаки!
2. **Ошибки в формуле дискриминанта.** Классика: $b^2 - 4ac$, а не $(b^2) - (4ac)$, если b отрицательный. $(-5)^2 = 25$, а не -25 .
3. **Путаница в знаках при подстановке в формулу корней.** Помните:
 $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. Минус перед b — это часть формулы.

Задачи для самостоятельного решения

1. $x^2 + 10x = -16$
2. $x^2 + 12 = 7x$
3. $x^2 - 17x + 72 = 0$
4. $(x - 6)^2 = -24x$
5. $x^2 + 9 = (x + 9)^2$

3. Неполные квадратные уравнения

Неполным квадратным уравнением называется уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

в котором хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю (при условии $a \neq 0$). Такие уравнения решаются проще, чем полные квадратные, так как не требуют вычисления дискриминанта. Они делятся на три типа в зависимости от того, какой коэффициент равен нулю.

Рассмотрим случаи, когда один или несколько коэффициентов равны нулю:

$c = 0$	$b = 0$	$b = 0$ и $c = 0$
$ax^2 + bx + 0 = 0$ $ax^2 + bx = 0$ $x(ax + b) = 0$ $x_1 = 0$ и $ax + b = 0$ $x_2 = -\frac{b}{a}$	$ax^2 + 0x + c = 0$ $ax^2 + c = 0$ $x^2 = -\frac{c}{a}$ Если $-\frac{c}{a} \geq 0$, то $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}, x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$	$ax^2 + 0x + 0 = 0$ $ax^2 = 0$ $x^2 = 0$ $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$

Пример 1. Решить уравнение $3x^2 - 12x = 0$

1. Вынесем x за скобки: $x(3x - 12) = 0$
2. Приравниваем каждый множитель к нулю: $x = 0$ и $3x - 12 = 0$
3. Решаем второе уравнение: $3x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{3} \Rightarrow x = 4$

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = 4$

Пример 2. Решить уравнение $4x^2 - 36 = 0$

1. Переносим -36 в правую часть (не забывая поменять знак на противоположный):

$$4x^2 = 36$$

2. Разделим левую и правую часть на 4:

$$x^2 = 9$$

3. Извлекаем квадратный корень:

$$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

$$x_1 = 3; x_2 = -3$$

Ответ: $x_1 = 3$; $x_2 = -3$

Пример 3. Решить уравнение $5x^2 + 20 = 0$

1. Переносим 20 в правую часть (не забывая поменять знак на противоположный):

$$5x^2 = -20$$

2. Разделим левую и правую часть на 5:

$$x^2 = -4$$

3. Так как $-4 < 0$, уравнение не имеет корней на множестве действительных чисел.

Ответ: нет действительных корней

Пример 4. Решить уравнение $-7x^2 = 0$

1. Делим левую и правую часть на -7 :

$$x^2 = 0$$

2. Извлекаем квадратный корень:

$$x = \sqrt{0} = 0$$

Ответ: $x = 0$

Типичные ошибки при решении неполных квадратных уравнений

1. **Потеря корня $x = 0$ в уравнениях вида $ax^2 + bx = 0$**

Ошибка: ученик делит обе части уравнения на x и получает только $x = -\frac{b}{a}$, забывая, что $x = 0$ также является корнем.

Правильно: всегда выносить x за скобку, а не делить на x .

2. **Неправильный перенос слагаемых**

Например, в уравнении $3x^2 = 12$ пишут $x^2 = 12 - 3$.

Правильно: сначала перенести, потом делить: $x^2 = \frac{12}{3}$.

3. **Ошибки при извлечении корня**

Из уравнения $x^2 = 9$ пишут только $x = 3$.

Правильно: всегда два корня: $x = \pm 3$.

4. **Некорректный анализ знака в уравнениях вида $ax^2 + c = 0$**

Не проверяют знак выражения $-\frac{c}{a}$, пытаются извлечь корень из отрицательного числа.

Задачи для самостоятельного решения

1. $5x^2 - 10x = 0$

2. $9x^2 + 18 = 0$

3. $2x^2 = 50$

4. $-4x^2 + 64 = 0$

5. $x^2 + 6x = 0$

6. $\frac{1}{2}x^2 = 0$

7. $3x^2 - 27 = 0$

8. $7x^2 + 14x = 0$

4. Кубические уравнения

Кубическим уравнением называется уравнение вида $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, где $a \neq 0$. Это уравнение третьей степени, которое всегда имеет **хотя бы один действительный корень** (в силу непрерывности кубической функции).

Общий подход к решению

1. **Приведение к стандартному виду** (делением на a):

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

$$\text{где } p = \frac{b}{a}, q = \frac{c}{a}, r = \frac{d}{a}.$$

2. **Поиск целых рациональных корней** (если коэффициенты целые):

Корни ищут среди делителей свободного члена r .

Проверяют $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ подстановкой.

3. Если найден корень x_1 , уравнение делится на $(x - x_1)$:

$$(x - x_1)(x^2 + tx + n) = 0,$$

где квадратный трёхчлен $x^2 + tx + n$ находится делением "уголком" или схемой Горнера.

4. Оставшиеся корни находятся как корни квадратного уравнения:

$$x^2 + tx + n = 0$$

через дискриминант.

Пример деления по схеме Горнера

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 5x + 6 & x^2 - 1 \\ \hline x^4 - x^2 & x^2 + 5x - 6 \\ \hline -5x^3 - 6x^2 & \\ -5x^3 - 5x & \\ \hline -6x^2 + 6 & \\ -6x^2 + 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Частные случаи и методы решения

1. **Уравнение вида $ax^3 + bx^2 + cx = 0$ (нет свободного члена)**

$$x(ax^2 + bx + c) = 0$$

Решение:

1) $x = 0$ – первый корень.

2) Решаем квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$.

Пример 1. Решить уравнение $2x^3 - 8x^2 + 6x = 0$

Решение:

1) Выносим x :

$$x(2x^2 - 8x + 6) = 0$$

2) $x = 0$

3) Решаем $2x^2 - 8x + 6 = 0$, делим на 2:

$$x^2 - 8x + 6 = 0$$

$$D = 16 - 12 = 4, x = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$x_2 = 3, x_3 = 1$$

Ответ: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 3$

2. **Приведённое кубическое уравнение (без x^2):**

$$x^3 + px + q = 0$$

- 1) Проверка на «очевидные» корни

Проверить целые делители свободного члена q : $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Если найден корень x_1 , перейти к Шагу 3.

- 2) Проверка симметрии (если $q = 0$):

Если $q = 0$, уравнение имеет вид:

$$x^3 + px = x(x^2 + p) = 0$$

Корни:

$$x_1 = 0, x_{2,3} = \pm\sqrt{-p} \text{ (если } p \leq 0\text{)}$$

Если $p > 0$, то только $x = 0$.

- 3) Деление многочлена (если найден корень x_1):

Если найден корень x_1 , разделить $x^3 + px + q$ на $(x - x_1)(x - x_1)$ (схема Горнера или деление уголком). Получим квадратный трёхчлен:

$$x^2 + mx + n = 0$$

Его корни:

$$x_{2,3} = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 4n}}{2}$$

Пример 1. Решить уравнение $x^3 - 3x + 2 = 0$

- 1) Проверяем делители 2: $\pm 1, \pm 2$

- 2) $x = 1$: $1 - 3 + 2 = 0$ – корень.

- 3) Делим $x^3 - 3x + 2$ на $(x - 1)$ по схеме Горнера и получаем

$$x^2 + x - 2 = 0$$

- 4) Решаем полученное квадратное уравнение:

$$D = 1 + 8 = 9, x = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x_2 = 1, x_3 = -2$$

Ответ: $x_{1,2} = 1, x_3 = -2$

3. Симметричные (возвратные) уравнения:

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$$

Алгоритм решения:

- 1) Группируем:

$$a(x^3 + 1) + b(x^2 + x) = 0$$

- 2) Разлагаем:

$$a(x + 1)(x^2 - x + 1) + bx(x + 1) = 0$$

$$(x + 1)[a(x^2 - x + 1) + bx] = 0$$

- 3) Решаем:

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$ax^2 + (b - a)x + a = 0$$

- 4) Производим замену переменных:

Иногда удобно сделать замену $x = t - \frac{p}{3}$, чтобы избавиться от члена с x^2 , т.е. приведение к виду $t^3 + At + B = 0$.

Пример 2. Решение с подбором корня и схемой Горнера. Решить уравнение

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

1) Ищем целые корни среди делителей 6: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

2) Проверяем $x = 1$:

$$1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$$

3) Делим многочлен на $(x - 1)$ по схеме Горнера, получаем

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

4) Решаем квадратное уравнение:

$$D = 25 - 24 = 1$$

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = 3, x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$$

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$

Пример 3. Уравнение с дробными коэффициентами. Решить уравнение

$$2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$$

1) Ищем целые корни среди делителей 2: $\pm 1, \pm 2$

2) Проверяем $x = -1$:

$$2(-1)^3 + 3(-1)^2 - 3(-1) - 2 = -2 + 3 + 3 - 2 = 2 \neq 0$$

3) Проверяем $x = 1$:

$$2 + 3 - 3 - 2 = 0$$

4) Делим на $(x - 1)$ по схеме Горнера и получаем $2x^2 + 5x + 2 = 0$.

5) Решаем полученное квадратное уравнение

$$D = 25 - 16 = 9$$

$$x_2 = \frac{-5-3}{4} = -2, x_3 = \frac{-5+3}{4} = -\frac{1}{2}$$

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = -2$.

Типичные ошибки

1. **Потеря корня $x = 0$** в уравнениях без свободного члена.
2. **Неправильный подбор корней** — проверять нужно все делители свободного члена, включая отрицательные.
3. **Ошибки в схеме Горнера** — внимательно умножать и складывать.
4. **Забывают, что кубическое уравнение имеет 3 корня** (с учётом кратности), даже если некоторые могут быть комплексными (в школе обычно требуют только действительные).

Задачи для самостоятельного решения

1. $x^3 - 4x + 3 = 0$

2. $x^3 + 2x - 3 = 0$

3. $x^3 + 5x - 14 = 0$

4. $x^3 - 27 = 0$

5. $x^3 + 6x - 20 = 0$

6. $x^3 + x = 0$

7. $x^3 - 7x + 6 = 0$

8. $x^3 + 4x = 0$

5. Рациональные уравнения

Рациональным уравнением называется уравнение вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0,$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, причём $Q(x) \neq 0$. На практике это уравнения, содержащие переменную x в знаменателе дроби.

Общий алгоритм решения

Шаг 1: Определение области допустимых значений (ОДЗ)

- **ОДЗ** — все значения x , при которых знаменатель **не равен нулю**.
- Найти все корни уравнения $Q(x) = 0$ и исключить их из множества решений.

Шаг 2: Приведение уравнения к общему знаменателю

- Найти **общий знаменатель** всех дробей в уравнении.
- Умножить **обе части уравнения** на общий знаменатель (с учётом ОДЗ, что знаменатель не ноль).
- Получить целое алгебраическое уравнение $P(x) = 0$.

Шаг 3: Решение полученного уравнения

- Решить уравнение $P(x) = 0$.
- Найти все корни.

Шаг 4: Проверка корней по ОДЗ

- Исключить те корни, которые обращают знаменатель исходного уравнения в ноль.
- Записать ответ.

Пример 1. Решить уравнение $\frac{2x+1}{x-3} = 0$

Решение:

1. **ОДЗ:** $x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$.
2. Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель не ноль:

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= 0 \\ x &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

3. Проверяем по ОДЗ: $-\frac{1}{2} \neq 3$ — подходит.

Ответ: $x = -\frac{1}{2}$

Пример 2. Решить уравнение $\frac{3}{x-2} + \frac{5}{x+1} = 0$

Решение:

1. **ОДЗ:** $x - 2 \neq 0$ и $x + 1 \neq 0$
 $x \neq 2, x \neq -1$.
2. **Общий знаменатель:** $(x - 2)(x + 1)$.
Умножаем обе части на него:

$$\begin{aligned} 3(x + 1) + 5(x - 2) &= 0 \cdot (x - 2)(x + 1) \\ 3x + 3 + 5x - 10 &= 0 \end{aligned}$$

3. Упрощаем:

$$\begin{aligned} 8x - 7 &= 0 \\ x &= \frac{7}{8} \end{aligned}$$

4. Проверяем по ОДЗ: $\frac{7}{8} \neq 2, \frac{7}{8} \neq -1$ — подходит.

Ответ: $x = \frac{7}{8}$

Пример 3. Решить уравнение $\frac{x}{x-1} - \frac{3}{x+2} = \frac{6}{x^2+x-2}$

Решение:

1. **Разложим знаменатель правой дроби:**

$$x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$$

Уравнение примет вид:

$$\frac{x}{x-1} - \frac{3}{x+2} = \frac{6}{(x-1)(x+2)}$$

2. ОДЗ: $x - 1 \neq 0$ и $x + 2 \neq 0$

$$x \neq 1, x \neq -2.$$

3. Общий знаменатель: $(x-1)(x+2)$.

Умножаем обе части на него:

$$x(x+2) - 3(x-1) = 6$$

4. Упрощаем:

$$x^2 + 2x - 3x + 3 = 6$$

$$x^2 - x + 3 - 6 = 0$$

$$x^2 - x - 3 = 0$$

5. Решаем квадратное уравнение:

$$D = 1 + 12 = 13$$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}, x_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$$

6. Проверяем по ОДЗ:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \approx 2.303 \neq 1, \neq -2 \text{ — подходит.}$$

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \approx -1.303 \neq 1, \neq -2 \text{ — подходит}$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}, x_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$$

Частные случаи и методы упрощения

1. Пропорция

Если уравнение имеет вид:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

то можно использовать свойство пропорции (крест-накрест):

$$A \cdot D = B \cdot C$$

Важно: предварительно записать ОДЗ: $B \neq 0, D \neq 0$.

Пример. Решить уравнение $\frac{1}{4x-1} = 5$

$$\text{ОДЗ: } 4x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{4}$$

$$\text{Представим в виде: } \frac{1}{4x-1} = \frac{5}{1}$$

По свойству пропорции:

$$5(4x - 1) = 1$$

$$20x - 5 = 1$$

$$20x = 6$$

$$x = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0.3$$

Ответ: $x = 0.3$.

2. Сумма дробей, равная нулю

Если уравнение имеет вид:

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = 0$$

то удобно перенести одну дробь:

$$\frac{A}{B} = -\frac{C}{D}$$

и применить метод пропорции, либо сразу привести к общему знаменателю.

Пример. Решить уравнение $\frac{2}{x-3} + \frac{5}{x+1} = 0$

Переносим:

$$\frac{2}{x-3} = -\frac{5}{x+1}$$

По свойству пропорции:

$$\begin{aligned}2(x+1) &= -5(x-3) \\2x+2 &= -5x+15 \\2x+5x &= 15-2 \\7x &= 13 \\x &= \frac{13}{7}\end{aligned}$$

Проверяем ОДЗ: $x \neq 3$, $x \neq -1$ – подходит.

Ответ: $x = \frac{13}{7}$.

3. Замена переменной

Если в уравнении встречаются повторяющиеся дробные выражения, иногда помогает замена.

Пример. Решить уравнение $\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = \frac{5}{2}$

Сделаем замену $t = \frac{x}{x+1}$, тогда $\frac{x+1}{x} = \frac{1}{t}$.

Уравнение примет вид:

$$t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$$

Умножаем левую и правую часть на $2t$:

$$\begin{aligned}2t^2 + 2 &= 5t \\2t^2 - 5t + 2 &= 0 \\D &= 25 - 16 = 9 \\t_1 &= \frac{5+3}{4} = 2, t_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Возвращаемся к x :

$$\begin{aligned}1) \quad \frac{x}{x+1} &= 2 \\x &= 2(x+1) \\x &= 2x+2 \\-x &= 2 \\x &= -2 \\2) \quad \frac{x}{x+1} &= \frac{1}{2} \\2x &= x+1 \\x &= 1\end{aligned}$$

Ответ: $x_1 = -2$, $x_2 = 1$

Типичные ошибки

1. **Не находят ОДЗ** или забывают проверить корни по ОДЗ.
2. **Умножают на общий знаменатель**, не учитывая, что он может быть равен нулю.
Правильно: умножать, считая что знаменатель $\neq 0$ (это и есть ОДЗ).
3. **Путают, когда дробь равна нулю**: дробь $= 0 \Leftrightarrow$ числитель $= 0$, знаменатель $\neq 0$.
4. **Теряют корни** при сокращении общих множителей в числителе и знаменателе.
Если после умножения на общий знаменатель получилось уравнение $(x-a)P(x) = 0$, и $x = a$ входит в ОДЗ, то это корень.
5. **Арифметические ошибки** при приведении к общему знаменателю.

Особые случаи

Случай 1. Знаменатели отличаются только знаком

$$\frac{2}{x-3} = \frac{4}{3-x}$$

Заметим, что $3-x = -(x-3)$. Тогда

$$\frac{2}{x-3} = \frac{4}{-(x-3)}$$

Умножаем на $-(x-3)$:

$$-2 = 4$$

Получили неверное равенство, следовательно решений нет.

Случай 2. Все знаменатели равны после преобразований

$$\frac{x+1}{x^2-4} + \frac{2}{x+2} = \frac{3}{x-2}$$

Здесь $x^2-4 = (x-2)(x+2)$ — это и будет общий знаменатель.

Задачи для самостоятельного решения

1.
$$\frac{5}{x} = \frac{10}{x+3}$$

2.
$$\frac{x-2}{x+1} = 0$$

3.
$$\frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+2} = 0$$

4.
$$\frac{x}{x-3} - \frac{9}{x^2-3x} = \frac{1}{x}$$

5.
$$\frac{2x+1}{x^2-9} - \frac{1}{x+3} = \frac{1}{x-3}$$

6.
$$\frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} = \frac{8}{x^2-4}$$

7.
$$\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} = \frac{3}{x+3}$$

8.
$$\frac{x^2-1}{x+2} = 0$$

6. Иррациональные уравнения

Иррациональным уравнением называется уравнение, в котором переменная содержится **под знаком корня** (радикала). Чаще всего встречаются уравнения с квадратными корнями вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$.

Основные методы решения

Метод 1: Возведение в квадрат (основной метод)

Если уравнение имеет вид:

$$\sqrt{f(x)} = g(x)$$

Алгоритм:

1. **Найти ОДЗ** (область допустимых значений):
 - Подкоренное выражение ≥ 0 : $f(x) \geq 0$
 - Правая часть уравнения (если она под знаком равенства с корнем) должна быть неотрицательной, если корень арифметический: $g(x) \geq 0$
2. **Возвести обе части в квадрат:**
$$f(x) = [g(x)]^2$$
3. **Решить полученное уравнение.**
4. **Сделать проверку** найденных корней:
 - Подставить в исходное уравнение
 - Или проверить выполнение ОДЗ и условия $g(x) \geq 0$

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{2x - 1} = 3$

Решение:

1) ОДЗ: $2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0.5$

2) Возводим в квадрат:

$$2x - 1 = 9$$

3) Решаем:

$$2x = 10 \Rightarrow x = 5$$

4) Проверяем:

ОДЗ: $5 \geq 0.5$ – удовлетворяет условию

Подставляем: $\sqrt{2 \cdot 5 - 1} = \sqrt{9} = 3, 3 = 3$

Ответ: $x = 5$.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{x^2 - 4} = x - 2$

Решение:

1) Записываем условия:

$$x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x \leq -2 \text{ или } x \geq 2$$

$$x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$$

Объединяя: $x \geq 2$

2) Возводим в квадрат:

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &= (x - 2)^2 \\ x^2 - 4 &= x^2 - 4x + 4 \end{aligned}$$

3) Упрощаем:

$$\begin{aligned} -4 &= -4x + 4 \\ -x &= -4x \\ x &= 2 \end{aligned}$$

4) Проверяем:

Условие $x \geq 2$ выполняется: $2 \geq 2$

Подставляем: $\sqrt{4-4} = \sqrt{0} = 0$ и $2-2=0$

Ответ: $x = 2$

Метод 2: Замена переменной

Если уравнение содержит несколько радикалов или сложную структуру.

Пример 3. Решить уравнение $x - 2\sqrt{x} - 3 = 0$

Решение:

1) Замена: $t = \sqrt{x}$, где $t \geq 0$, $x = t^2$

2) Подставляем: $t^2 - 2t - 3 = 0$

3) Решаем квадратное уравнение:

$$D = 4 + 12 = 16$$

$$t_1 = \frac{2+4}{2} = 3, t_2 = \frac{2-4}{2} = -1$$

4) Отбрасываем $t = -1$, т.к. не удовлетворяет $t \geq 0$

5) Возвращаемся к x : $\sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9$

6) Проверка: $9 - 2\sqrt{9} - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$

Ответ: $x = 9$

Метод 3: Уединение радикала и последовательное возведение в квадрат

Если уравнение содержит два или более радикалов.

Пример 4. Решить уравнение $\sqrt{2x+5} - \sqrt{x-1} = 2$

Решение:

1) ОДЗ:

$$2x + 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2.5$$

$$x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

$$\text{Объединяем: } x \geq 1$$

2) Уединяем один радикал:

$$\sqrt{2x+5} = \sqrt{x-1} + 2$$

3) Возводим в квадрат(обе части ≥ 0):

$$2x + 5 = (x - 1) + 4\sqrt{x-1} + 4$$

$$2x + 5 = x + 3 + 4\sqrt{x-1}$$

4) Упрощаем:

$$x + 2 = 4\sqrt{x-1}$$

5) Снова возводим в квадрат:

$$(x + 2)^2 = 16(x - 1)$$

$$x^2 + 4x + 4 = 16x - 16$$

$$x^2 - 12x + 20 = 0$$

6) Решаем квадратное уравнение:

$$D = 144 - 80 = 64$$

$$x_1 = \frac{12+8}{2} = 10, x_2 = \frac{12-8}{2} = 2$$

7) Проверка:

$$x_1 = 10: \sqrt{25} - \sqrt{9} = 5 - 3 = 2 - \text{подходит}$$

$$x_2 = 2: \sqrt{9} - \sqrt{1} = 3 - 1 = 2 - \text{подходит}$$

Ответ: $x_1 = 2, x_2 = 10$

Метод 4: Использование свойств монотонности

Если функция в одной части уравнения монотонна, а в другой — константа.

Пример 5. Решить уравнение $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} = 5$

Решение:

1. ОДЗ: $x \geq -3$
2. Замечаем, что левая часть — возрастающая функция (как сумма возрастающих функций)
3. Подбираем корень: $x = 1$

$$\sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5$$

4. Так как функция монотонно возрастает, других корней нет.

Ответ: $x = 1$

Частные случаи

1. Уравнение вида $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$

Решается простым возведением в квадрат с проверкой ОДЗ:

$$f(x) = g(x), f(x) \geq 0 \quad (\text{или } g(x) \geq 0)$$

Пример. Решить уравнение $\sqrt{x^2 + 5} = \sqrt{3x + 1}$

Возводим в квадрат: $x^2 + 5 = 3x + 1$

Решаем:

$$x^2 - 3x + 4 = 0$$

$D < 0$ — нет действительных корней

2. Уравнения с кубическими и другими корнями

Для корней нечётной степени ОДЗ не требуется, так как корень нечётной степени определён для всех действительных чисел.

Пример. Решить уравнение $\sqrt[3]{x+2} = 2$

Возводим в куб: $x + 2 = 8 \Rightarrow x = 6$

Проверка: $\sqrt[3]{6+2} = \sqrt[3]{8} = 2$

Ответ: $x = 6$

Типичные ошибки

1. **Отсутствие ОДЗ или проверки** — самая частая ошибка! При возведении в квадрат могут появиться посторонние корни.

2. **Неправильное возведение в квадрат:**

$$(\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)})^2 \neq f(x) + g(x)$$

Правильно (использовать формулы сокращённого умножения):

$$(\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)})^2 = f(x) + 2\sqrt{f(x)g(x)} + g(x)$$

3. **Потеря корней** при делении на выражение, содержащее переменную.
4. **Неправильная замена переменной** без учёта ограничений.
5. **Забывают, что арифметический квадратный корень всегда неотрицателен:**

$$\sqrt{x^2} = |x|, \text{ а не просто } x$$

Алгоритм решения в общем виде

1. **Определить тип уравнения** (сколько радикалов, их степени).
2. **Найти ОДЗ** (для корней чётной степени).
3. **Выбрать метод решения:**
 - Если один радикал $\rightarrow$ возвести в степень
 - Если несколько радикалов $\rightarrow$ уединить и последовательно возводить
 - Если сложное выражение $\rightarrow$ замена переменной
4. **Решить полученное алгебраическое уравнение.**
5. **Сделать проверку** всех найденных корней подстановкой в исходное уравнение.
6. **Записать ответ.**

Задачи для самостоятельного решения

1. $\sqrt{3x+4} = 5$
2. $\sqrt{x+7} = x-5$
3. $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x+1} = 0$
4. $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = 0$
5. $x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$
6. $\sqrt[3]{2x-1} = 3$
7. $\sqrt{x^2+9} = x+1$
8. $\sqrt{x+5} - \sqrt{3-x} = 2$

7. Показательные уравнения

Показательным уравнением называется уравнение, в котором неизвестная переменная содержится в **показателе степени**. Общий вид:

$$a^{f(x)} = b^{g(x)}, \text{ где } a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$$

Основные методы решения

Метод 1: Приведение к одинаковому основанию

Если уравнение можно представить в виде:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}$$

то, в силу монотонности показательной функции (при $a > 0, a \neq 1$):

$$f(x) = g(x)$$

Пример 1. Решить уравнение $2^{x+3} = 4^{x-1}$

Решение:

1. Приводим правую часть к основанию 2:

$$4^{x-1} = (2^2)^{x-1} = 2^{2(x-1)} = 2^{2x-2}$$

2. Уравнение принимает вид:

$$2^{x+3} = 2^{2x-2}$$

3. Приравниваем показатели:

$$x + 3 = 2x - 2$$

4. Решаем:

$$3 + 2 = 2x - x$$

$$x = 5$$

Ответ: $x = 5$

Метод 2: Вынесение общего множителя (приведение к одной степени)

Если уравнение имеет вид:

$$a^{f(x)} \pm a^{g(x)} = 0$$

можно вынести степень с меньшим показателем за скобки.

Пример 2. Решить уравнение $3^{x+1} - 2 \cdot 3^x = 9$

Решение:

- 1) Выносим 3^x :

$$3^x \cdot 3 - 2 \cdot 3^x = 9$$

$$3^x(3 - 2) = 9$$

$$3^x \cdot 1 = 9$$

- 2) Приводим к одинаковому основанию:

$$3^x = 3^2$$

- 3) Приравниваем показатели:

$$x = 2$$

Ответ: $x = 2$

Метод 3: Замена переменной

Если уравнение содержит выражение вида $a^{f(x)}$, можно сделать замену $t = a^{f(x)}$, где $t > 0$.

Пример 3. Решить уравнение $4^x - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$

Решение:

1. Замечаем: $4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2$
2. Делаем замену: $t = 2^x$, где $t > 0$
3. Уравнение принимает вид: $t^2 - 5t + 6 = 0$
4. Решаем квадратное уравнение:

$$D = 25 - 24 = 1$$

$$t_1 = \frac{5+1}{2} = 3, t_2 = \frac{5-1}{2} = 2$$

5. Оба корня положительны, возвращаемся к x :

$$2^x = 3 \Rightarrow x = \log_2 3$$

$$2^x = 2 \Rightarrow x = 1$$

Ответ: $x = 1, x = \log_2 3$

Метод 4: Логарифмирование обеих частей

Если уравнение имеет вид $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ и нельзя привести к одинаковому основанию.

Пример 4. Решить уравнение $3^{x+1} = 27^{x-1}$

Решение:

Замечаем, что можно решить без логарифмирования, так как $27 = 3^3$. Но специально решим через логарифмирование для демонстрации метода.

- 1) **Логарифмируем обе части** по основанию 3 (можно и по любому другому, но по основанию 3 удобнее):

$$\log_3(3^{x+1}) = \log_3(27^{x-1})$$

- 2) Используем свойство логарифма $\log_a(b^c) = c \cdot \log_a b$:

$$(x+1) \cdot \log_3 3 = (x-1) \cdot \log_3 27$$

- 3) Вычисляем $\log_3 3 = 1, \log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$:

$$x+1 = 3(x-1)$$

- 4) Решаем линейное уравнение:

$$x+1 = 3x-3$$

$$1+3 = 3x-x$$

$$4 = 2x$$

$$x = 2$$

- 5) Проверка:

Подставляем $x = 2$:

$$3^{2+1} = 3^3 = 27$$

$$27^{2-1} = 27^1 = 27$$

Равенство верно.

Ответ: $x = 2$

Метод 5: Графический метод (оценка)

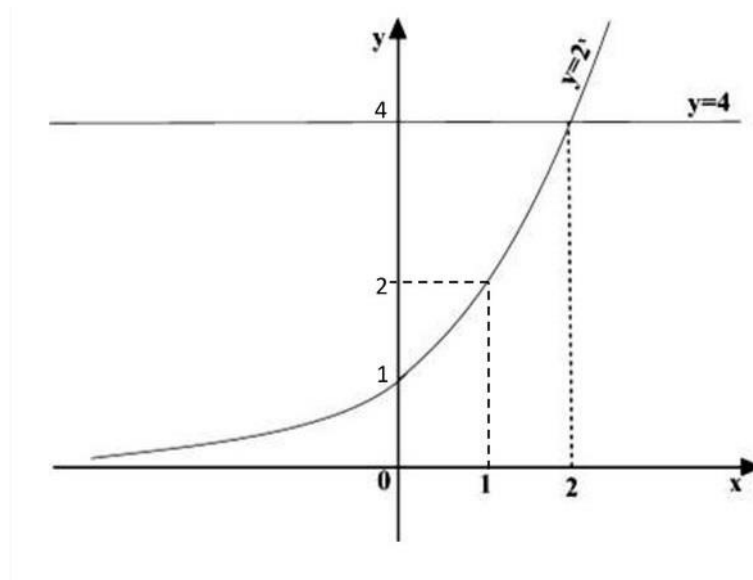
Иногда можно оценить левую и правую части уравнения.

Пример 5. Решить уравнение $2^x = 4$

Решение:

Для решения уравнения необходимо построить графики функции $y = 2^x$ и $y = 4$.

Координата x точки пересечения графиков этих функций является корнем уравнения.



Частные случаи

1. Однородные показательные уравнения

Уравнение вида $A \cdot a^{2x} + B \cdot a^x \cdot b^x + C \cdot b^{2x} = 0$

Пример. Решить уравнение $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$

Решение:

Производим замену: $t = 3^x$, получаем уравнение $t^2 - 4t + 3 = 0$

2. Уравнение вида $a^{f(x)} = 1$

Решение: $a^{f(x)} = 1 \Rightarrow f(x) = 0$ (при $a \neq 1$)

Пример. Решить уравнение $5^{x^2-4} = 1$

Решение: $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2$

3. Уравнение вида $a^{f(x)} = b$

Решение: $f(x) = \log_a b$

Пример. Решить уравнение $3^{2x} = 7$

Решение: $2x = \log_3 7 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \log_3 7$

Типичные ошибки

1. Неучёт области определения:

Основание степени должно быть положительным и не равным 1.

Выражения вида $a^{f(x)}$ определены для всех x , если $a > 0$.

2. Неправильное приведение к общему основанию:

$4^x \neq 2^x \cdot 2^x$ (это верно, но осторожно с коэффициентами)

Правильно: $4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2$

3. Ошибки при замене переменной:

Не указывают условие $t > 0$ для показательной функции.

Забывают вернуться к исходной переменной.

4. Неправильное решение уравнений вида $a^{f(x)} = 1$:

Неверно: $a^{f(x)} = 1 \Rightarrow a = 1$ или $f(x) = 0$

Правильно: при $a > 0, a \neq 1$ только $f(x) = 0$

5. Путаница со свойствами степеней:

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}, (a^x)^y = a^{xy}$$

Алгоритм решения показательных уравнений

1. **Определить тип уравнения** (одинаковые основания, можно ли сделать замену и т.д.)
2. **Привести к одному основанию**, если это возможно
3. **Сделать замену переменной**, если уравнение квадратное относительно показательной функции
4. **Логарифмировать**, если основания разные и нельзя привести к общему
5. **Решить полученное алгебраическое уравнение**
6. **Сделать проверку** (особенно если были логарифмы или замена)
7. **Записать ответ**

Задачи для самостоятельного решения

1. $3^{x-2} = 81$
2. $2^{x+1} + 2^{x-1} = 20$
3. $9^x - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$
4. $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$
5. $4^x = 5^{x+2}$
6. $2^{x^2} \cdot 5^x = 0.1 \cdot 10^{x+3}$
7. $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x+1} = 539$
8. $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2} \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$

8. Логарифмические уравнения

Логарифмическим уравнением называется уравнение, в котором неизвестная переменная находится **под знаком логарифма** или в **основании логарифма**. Общий вид: $\log_a f(x) = g(x)$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $f(x) > 0$.

Основные методы решения

Метод 1: Определение логарифма

Если уравнение имеет вид $\log_a f(x) = b$, то по определению логарифма $f(x) = a^b$.

Пример 1. Решить уравнение $\log_2(3x - 1) = 3$

Решение:

- 1) ОДЗ: $3x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{3}$
- 2) По определению логарифма $3x - 1 = 2^3 = 8$
- 3) Решаем линейное уравнение: $3x = 9 \Rightarrow x = 3$
- 4) Проверяем ОДЗ: $3 > \frac{1}{3}$ – подходит.

Ответ: $x = 3$

Метод 2: Приведение к одному основанию

Если в уравнении несколько логарифмов, их нужно привести к одному основанию, используя формулу:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Пример 2. Решить уравнение $\log_3 x + \log_9 x = 3$

Решение:

- 1) ОДЗ: $x > 0$
- 2) Приводим все логарифмы к основанию 3:

$$\log_9 x = \frac{\log_3 x}{\log_3 9} = \frac{\log_3 x}{2}$$

- 3) Подставляем в уравнение:

$$\log_3 x + \frac{\log_3 x}{2} = 3$$

- 4) Умножаем на 2:

$$\begin{aligned} 2\log_3 x + \log_3 x &= 6 \\ 3\log_3 x &= 6 \end{aligned}$$

- 5) Делим на 3:

$$\log_3 x = 2$$

- 6) По определению логарифма:

$$x = 3^2 = 9$$

- 7) Проверяем ОДЗ: $9 > 0$ – подходит.

Ответ: $x = 9$

Метод 3: Потенцирование

Если уравнение имеет вид:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

то в силу монотонности логарифмической функции (при $a > 0$, $a \neq 1$):

$$f(x) = g(x)$$

с дополнительными условиями $f(x) > 0$, $g(x) > 0$.

Пример 3. Решить уравнение $\lg(2x - 1) = \lg(x + 3)$

Решение:

1) ОДЗ:

$$2x - 1 > 0 \Rightarrow x > 0.5$$

$$x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3$$

$$\text{Объединяя: } x > 0.5$$

2) Потенцируем (основания логарифмов одинаковы = 10):

$$2x - 1 = x + 3$$

3) Решаем:

$$2x - x = 3 + 1$$

$$x = 4$$

4) Проверяем ОДЗ: $4 > 0.5$ — подходит.

Ответ: $x = 4$

Метод 4: Замена переменной

Если уравнение содержит выражения вида $\log_a f(x)$, можно сделать замену $t = \log_a f(x)$ или $t = \log_a x$.

Пример 4. Решить уравнение $(\log_2 x)^2 - 3\log_2 x + 2 = 0$

Решение:

1) ОДЗ: $x > 0$

2) Делаем замену $t = \log_2 x$, тогда уравнение примет вид $t^2 - 3t + 2 = 0$

3) Решаем полученное квадратное уравнение

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$t_1 = \frac{3+1}{2} = 2, t_2 = \frac{3-1}{2} = 1$$

4) Возвращаемся к переменной x :

$$\log_2 x = 2 \Rightarrow x = 2^2 = 4$$

$$\log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2^1 = 2$$

5) Проверяем ОДЗ: оба числа положительны.

Ответ: $x_1 = 2, x_2 = 4$

Метод 5: Использование свойств логарифмов

Основные свойства:

1) $\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$, при $a > 0, b > 0$

2) $\log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$, при $a > 0, b > 0$

3) $\log_a(b^c) = c \cdot \log_a b$

Пример 5. Решить уравнение $\lg(x - 1) + \lg(x + 1) = \lg 8$

Решение:

1) ОДЗ:

$$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

$$x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$$

$$\text{Объединяя: } x > 1$$

2) Используем свойство суммы логарифмов:

$$\lg[(x - 1)(x + 1)] = \lg 8$$

$$\lg(x^2 - 1) = \lg 8$$

3) Потенцируем: $x^2 - 1 = 8$

4) Решаем:

$$x^2 = 9$$

$$x_1 = 3, x_2 = -3$$

5) Проверяем ОДЗ: $x > 1$:

$x_1 = 3$ – подходит

$x_2 = -3$ – не подходит

Ответ: $x = 3$

Специальные приёмы

1. Логарифмы с переменным основанием

Уравнение вида $\log_{f(x)} g(x) = h(x)$ требуют особого внимания к ОДЗ:

$$f(x) > 0, f(x) \neq 1$$

$$g(x) > 0$$

Пример 6. Решить уравнение $\log_x(2x^2 - 3x + 1) = 2$

Решение:

1) ОДЗ: $x > 0, x \neq 1$ (основание)

$$2x^2 - 3x + 1 > 0$$

Решаем неравенство

$$2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}$$

Неравенство > 0 выполняется при $x < 0.5$ или $x > 1$

Объединяем все условия: $x > 1$ (т.к. из первого условия $x > 0, x \neq 1$ и из второго $x > 1$ или $x < 0.5$, но $x > 0$, поэтому остается $x > 1$).

2) По определению логарифма: $2x^2 - 3x + 1 = x^2$

3) Переносим все в одну сторону:

$$2x^2 - 3x + 1 - x^2 = 0$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

4) Решаем полученное квадратное уравнение:

$$D = 9 - 4 = 5$$

$$x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

5) Проверяем ОДЗ ($x > 1$):

$$x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2.618 > 1 - \text{подходит}$$

$$x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0.382 < 1 - \text{не подходит}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

2. Переход к новому основанию

Иногда удобно перейти к основанию, которое упрощает уравнение.

Пример 7. Решить уравнение $\log_2 x \cdot \log_4 x = 8$

Решение:

1) ОДЗ: $x > 0$

2) Приводим к знаменателю 2:

$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2}$$

3) Подставляем:

$$\log_2 x \cdot \frac{\log_2 x}{2} = 8$$
$$\frac{(\log_2 x)^2}{2} = 8$$

4) Умножаем на 2: $(\log_2 x)^2 = 16$

5) Извлекаем корень: $\log_2 x = \pm 4$

6) Находим x :

$$\log_2 x = 4 \Rightarrow x = 2^4 = 16$$

$$\log_2 x = -4 \Rightarrow x = 2^{-4} = \frac{1}{16}$$

7) Проверяем ОДЗ: оба положительны.

Ответ: $x_1 = 16$, $x_2 = \frac{1}{16}$

Типичные ошибки

1. **Не находят ОДЗ** — самая опасная ошибка! Логарифм определён только для положительных аргументов.
2. **Потеря корней при потенцировании** — нужно проверять, чтобы оба выражения под логарифмами оставались положительными.
3. **Неправильное применение свойств логарифмов:**
$$\log_c(a + b) \neq \log_c a + \log_c b$$
$$\log_c(a - b) \neq \log_c a - \log_c b$$
4. **Забывают, что основание логарифма $a > 0$, $a \neq 1$.**
5. **Путаница с логарифмами по разным основаниям** — нельзя потенцировать, если основания разные.
6. **Ошибки при решении квадратных уравнений** после замены переменной.

Алгоритм решения логарифмических уравнений

1. **Найти ОДЗ** — записать все условия:
 - Аргументы всех логарифмов > 0
 - Основания всех логарифмов > 0 и $\neq 1$
2. **Преобразовать уравнение**, используя:
 - Определение логарифма
 - Свойства логарифмов
 - Формулу перехода к новому основанию
3. **Решить полученное алгебраическое уравнение.**
4. **Сделать проверку:**
 - Проверить выполнение ОДЗ
 - Подставить корни в исходное уравнение
5. **Записать ответ**, исключив посторонние корни.

Задачи для самостоятельного решения

1. $\log_5(2x + 3) = 2$

2. $\log_3(x^2 - 5) = \log_3(x - 1)$

3. $\log_2 x + \log_4 x = 3$

4. $\lg(x + 1) - \lg(x - 1) = 1$

5. $(\log_3 x)^2 - 5\log_3 x + 6 = 0$

6. $\log_x(x + 6) + \log_2(x - 2) = 3$

7. $\log_2(x + 3) + \log_2(x - 2) = 3$

8. $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3x + 2) = 1$

9. Тригонометрические уравнения

Тригонометрическим уравнением называется уравнение, в котором неизвестная переменная содержится под знаком **тригонометрической функции** (синуса, косинуса, тангенса, котангенса). Общий вид: $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$.

Основные типы и методы решения

Тип 1: Простейшие тригонометрические уравнения

Уравнение вида $\sin x = a$

Решение существует при $|a| \leq 1$

Формула решения: $x = (-1)^n \cdot \arcsin a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

Или в виде двух серий:

$$x = \arcsin a + 2\pi n \text{ или } x = \pi - \arcsin a + 2\pi n$$

Частные случаи:

$\sin a = -1$	$\sin a = 0$	$\sin a = 1$
$x = -\frac{\pi}{2} + \pi n$	$x = \pi n$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$

Пример 1.1. Решить уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$

Решение:

$$x = (-1)^n \cdot \arcsin \frac{1}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

или

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \text{ или } x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$$

Уравнение вида $\cos x = a$

Решение существует при $|a| \leq 1$

Формула решения: $x = \pm \arccos a + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

Частные случаи:

$\cos a = -1$	$\cos a = 0$	$\cos a = 1$
$x = \pi + 2\pi n$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x = 2\pi n$

Пример 1.2. Решить уравнение $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Решение:

$$x = \pm \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Уравнение вида $\operatorname{tg} x = a$

Решение существует при $a \in \mathbb{R}$

Формула решения: $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

ОДЗ: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$

Частные случаи:

$\operatorname{tg} a = -1$	$\operatorname{tg} a = 0$	$\operatorname{tg} a = 1$
$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$	$x = \pi n$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$

Пример 1.3. Решить уравнение $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

Решение:

$$x = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Уравнение вида $\operatorname{ctg} x = a$

Формула решения: $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

ОДЗ: $x \neq \pi n$

Пример 1.4. Решить уравнение $\operatorname{ctg} x = 1$

Решение:

Это частный случай. Тогда $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Тип 2: Уравнения, сводящиеся к квадратным

Пример 2. Решить уравнение $2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0$

Решение:

1. Замена: $t = \sin x$, где $|t| \leq 1$

2. Получаем квадратное уравнение:

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$D = 25 - 16 = 9$$

$$t_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}, t_2 = \frac{5+3}{2} = 2$$

3. $t = 2$ — не подходит (так как $|\sin x| \leq 1$)

4. $\sin x = \frac{1}{2}$:

$$x = (-1)^n \cdot \arcsin \frac{1}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Тип 3: Однородные уравнения**Уравнение вида $a \sin x + b \cos x = 0$**

Алгоритм решения:

1) Делим обе части на $\cos x$ (при условии $\cos x \neq 0$):

$$a \operatorname{tg} x + b = 0$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}$$

$$x = -\operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \right) + \pi n$$

2) Отдельно проверяем случай $\cos x = 0$: если $\cos x = 0$, то $\sin x = \pm 1$, подставляем в исходное уравнение.

Пример 3.1. Решить уравнение $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$

Решение:

1) Делим обе части на $\cos x$:

$$\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$$

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi n$$

2) Проверяем $\cos x = 0$: если $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, то $\sin x = \pm 1$, подставляем:

$$\pm 1 - \sqrt{3} \cdot 0 = \pm 1 \neq 0 - \text{не подходит.}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$

Однородное уравнение второй степени:

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

1) Делим обе части на $\cos^2 x$ (при $\cos x \neq 0$):

$$a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0$$

2) Решаем квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} x$

3) Проверяем случай $\cos x = 0$

Пример 3.2. Решить уравнение $\sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0$

Решение:

1) Делим обе части на $\cos^2 x$:

$$\operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x + 2 = 0$$

2) Производим замену $t = \operatorname{tg} x$:

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$t_1 = 1, t_2 = 2$$

3) Находим x :

$$\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$\operatorname{tg} x = 2 \Rightarrow x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n$$

4) Проверяем $\cos x = 0$: если $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, то $\sin x = \pm 1$, подставляем:

$$1 - 0 + 0 = 1 \neq 0 - \text{не подходит.}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n$

Тип 4: Уравнения вида $a \sin x + b \cos x = c$

Метод введения вспомогательного угла:

1) Делим обе части на $\sqrt{a^2 + b^2}$:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

2) Вводим угол φ , такой, что:

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Тогда:

$$\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

3) Решение существует, если $\left| \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1$

Пример 4. Решить уравнение $\sin x + \cos x = 1$

Решение:

1) $a = 1, b = 1, \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$

2) Делим обе части на $\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

3) Замечаем, что $\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4}$, тогда

$$\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

4) Решаем:

$$x + \frac{\pi}{4} = (-1)^n \cdot \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} + \pi n$$

$$x + \frac{\pi}{4} = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi n$$

5) Два случая:

$$\text{При четном } n: x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n = 2\pi n$$

$$\text{При нечетном } n: x = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi(2n + 1) = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

Ответ: $x = 2\pi n, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

Тип 5: Уравнения, решаемые разложением на множители

Пример 5. Решить уравнение $\sin 2x - \sin x = 0$

Решение:

1) Используем формулу: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$:

$$2 \sin x \cos x - \sin x = 0$$

2) Выносим $\sin x$:

$$\sin x (2 \cos x - 1) = 0$$

3) Решаем два уравнения:

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi n$$

$$2 \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$$

Ответ: $x = \pi n, x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$

Тип 6: Уравнения с ограниченным промежутком (отбор корней)

Пример 6. Найти все решения уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ на промежутке $[0; 2\pi]$

Решение:

1) Общее решение: $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$

2) Подставляем $n = 0$: $x = \frac{\pi}{6}$ (входит в промежуток)

3) Подставляем $n = 1$: $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ (входит в промежуток)

4) Подставляем $n = 2$: $x = 2\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6}$ (не входит в промежуток)

5) Подставляем $n = -1$: $x = -\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6}$ (не входит в промежуток)

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{5\pi}{6}$

Основные формулы

1. Формулы двойного угла:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

2. Формулы понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

3. Формулы преобразования суммы в произведение:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

Типичные ошибки

1. **Забывают проверять ОДЗ** для тангенса и котангенса.
2. **Путают формулы** для синуса и косинуса:
 $\sin x = a: x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$
 $\cos x = a: x = \pm \arccos a + 2\pi n$
3. **Теряют корни** при делении на выражение, содержащее тригонометрическую функцию.
4. **Не делают отбор корней**, когда требуется найти решения на заданном промежутке.
5. **Неправильно применяют формулы** приведения.
6. **Забывают про $n \in \mathbb{Z}$** в окончательном ответе.

Алгоритм решения тригонометрических уравнений

1. **Определить тип уравнения** (простейшее, квадратное, однородное и т.д.).
2. **Привести к простейшему виду**, используя:
 - Тригонометрические формулы
 - Замену переменной
 - Разложение на множители
3. **Решить полученное простейшее уравнение.**
4. **Сделать отбор корней**, если указан промежуток.
5. **Записать ответ** с указанием $n \in \mathbb{Z}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$
3. $\operatorname{tg} x = -1$
4. $\sin x + \cos x = 0$
5. $\sin 2x = \cos x$
6. $2 \sin^2 x + 5 \cos x - 4 = 0$
7. $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$
8. Найти все решения уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$
на промежутке $[-\pi; \pi]$

10. Системы уравнений

Системой уравнений называется совокупность двух или более уравнений, которые должны выполняться одновременно. Общий вид системы двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Решение системы — это пара чисел $(x_0; y_0)$, удовлетворяющая **каждому** уравнению системы.

Основные методы решения систем

Метод 1: Подстановка

Выражаем одну переменную из одного уравнения и подставляем в другое.

Пример 1. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = 2 \end{cases}$

Решение:

- 1) Из второго уравнения выражаем x :

$$x = y + 2$$

- 2) Подставляем в первое уравнение:

$$2(y + 2) + y = 7$$

$$2y + 4 + y = 7$$

$$3y = 3$$

$$y = 1$$

- 3) Находим x :

$$x = 1 + 2 = 3$$

Ответ: $(3; 1)$

Метод 2: Алгебраического сложения (вычитания)

Умножаем уравнения на коэффициенты так, чтобы при сложении (вычитании) одна переменная исчезла.

Пример 2. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$

Решение:

- 1) Складываем уравнения (коэффициенты при y уже противоположны):

$$(3x + 2y) + (5x - 2y) = 8 + 4$$

$$8x = 12$$

$$x = 1.5$$

- 2) Подставляем $x = 1.5$ в первое уравнение:

$$3 \cdot 1.5 + 2y = 8$$

$$4.5 + 2y = 8$$

$$2y = 3.5$$

$$y = 1.75$$

Метод 3: Замены переменных

Пример 3. Решить систему уравнений $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{2}{x} - \frac{3}{y} = -1 \end{cases}$

Решение:

- 1) Вводим замену: $u = \frac{1}{x}, v = \frac{1}{y}$:

$$\begin{cases} u + v = 5 \\ 2u - 3v = -1 \end{cases}$$

2) Решаем систему линейных уравнений:

Из первого уравнения выражаем u : $u = 5 - v$

Подставляем выраженное значение во второе уравнение системы:

$$2(5 - v) - 3v = -1$$

$$10 - 2v - 3v = -1$$

$$-5v = -11$$

$$v = 2.2$$

$$u = 5 - 2.2 = 2.8$$

3) Возвращаемся к исходным переменным x, y :

$$x = \frac{1}{u} = \frac{1}{2.8} = \frac{5}{14}$$

$$y = \frac{1}{v} = \frac{1}{2.2} = \frac{5}{11}$$

Ответ: $\left(\frac{5}{14}; \frac{5}{11}\right)$

Системы с нелинейными уравнениями

Тип 1: Симметричные системы

Уравнения симметричны относительно переменных x и y .

Пример 4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$

Решение:

1) По теореме Виета, x и y — корни квадратного уравнения:

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

2) Решаем квадратное уравнение: $t_1 = 2, t_2 = 3$

3) Пары решений: $(2; 3)$ и $(3; 2)$

Ответ: $(2; 3), (3; 2)$

Тип 2: Одно уравнение линейное, другое — нелинейное

Пример 5. Решить систему уравнений $\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$

Решение:

1) Выражаем y из первого уравнения системы: $y = 4 - x$

2) Подставляем во второе уравнение системы:

$$x^2 + (4 - x)^2 = 10$$

$$x^2 + 16 - 8x + x^2 = 10$$

$$2x^2 - 8x + 6 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

3) Решаем полученное квадратное уравнение: $x_1 = 1, x_2 = 3$

4) Находим y :

$$\text{При } x = 1: y = 3$$

$$\text{При } x = 3: y = 1$$

Ответ: $(1; 3), (3; 1)$

Тип 3: Однородные системы

Уравнения однородны относительно переменных.

Пример 6. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 - xy = 6 \\ y^2 - xy = 3 \end{cases}$$

Решение:

- 1) Вычитаем из первого уравнения второе:

$$\begin{aligned} (x^2 - xy) - (y^2 - xy) &= 6 - 3 \\ x^2 - y^2 &= 3 \end{aligned}$$

- 2) Разложим по формуле разности квадратов:

$$(x - y)(x + y) = 3$$

- 3) Вводим замену переменных: $u = x - y, v = x + y$:

$$uv = 3$$

- 4) Также из первого исходного уравнения:

$$\begin{aligned} x(x - y) &= 6 \\ x \cdot u &= 6 \end{aligned}$$

- 5) Из системы $\begin{cases} uv = 3 \\ xu = 6 \end{cases}$ находим $x = \frac{6}{u}, v = \frac{3}{u}$

- 6) Так как $v = x + y$, то $y = v - x = \frac{3}{u} - \frac{6}{u} = -\frac{3}{u}$

- 7) Подставляем в $u = x - y$:

$$\begin{aligned} u &= \frac{6}{u} - \left(-\frac{3}{u}\right) = \frac{9}{u} \\ u^2 &= 9 \\ u_1 &= 3, u_2 = -3 \end{aligned}$$

- 8) Находим пары:

$$u = 3: x = 2, y = -1$$

$$u = -3: x = -2, y = 1$$

Ответ: $(2; -1), (-2; 1)$

Системы с тремя переменными

Пример 7. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

Решение:

- 1) Складываем первое и третье уравнения:

$$\begin{aligned} (x + y + z) + (x + y - z) &= 6 + 0 \\ 2x + 2y &= 6 \\ x + y &= 3 \end{aligned}$$

- 2) Из первого уравнения: $z = 6 - (x + y) = 6 - 3 = 3$

- 3) Из второго уравнения: $x - y = 2 - z = 2 - 3 = -1$

- 4) Решаем систему:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

Складываем: $2x = 2 \Rightarrow x = 1$, тогда $y = 2$

Ответ: $(1; 2; 3)$

Графический метод

Каждое уравнение системы представляет собой линию на координатной плоскости.

Решение системы — координаты точки пересечения этих линий.

Пример 8. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 2x - y = -9 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$$

Решение:

- 1) Выразим y из каждого уравнения системы:

$$\begin{cases} y = 2x + 9 \\ y = -1.5x + 2 \end{cases}$$

- 2) Поскольку оба уравнения линейные, то графиком является пара пересекающихся прямых. Для построения прямой достаточно двух точек:

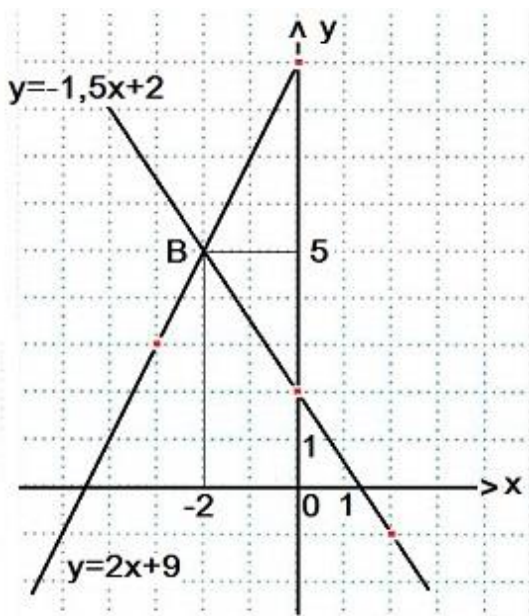
$$y = 2x + 9$$

x	0	-3
y	9	3

$$y = 1.5x + 2$$

x	0	2
y	2	-1

- 3) Построим графики функций:



- 4) Найдем точку пересечения. Точка $B(-2; 5)$.

Ответ: $(-2; 5)$

Типичные ошибки

1. Не проверяют решение подстановкой в оба уравнения.
2. Теряют решения при делении на выражение с переменными.
3. Путают методы подстановки и сложения.
4. Забывают про ОДЗ в уравнениях с дробями, корнями, логарифмами.
5. Неправильно выражают переменную при методе подстановки.
6. Не рассматривают все возможные случаи в симметричных системах (пары $(x; y)$ и $(y; x)$).

Алгоритм решения систем уравнений

1. **Определить тип системы** (линейная, нелинейная, симметричная и т.д.).
2. **Выбрать метод решения:**
 - Для линейных: сложение/вычитание или подстановка
 - Для симметричных: теорема Виета
 - Для смешанных: подстановка линейного в нелинейное
3. **Решить полученное уравнение(уравнения).**
4. **Найти все переменные.**
5. **Сделать проверку** подстановкой в исходную систему.
6. **Записать ответ** в виде пар чисел.

Задачи для самостоятельного решения

1.
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} xy = 12 \\ x + y = 7 \end{cases}$$
3.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x - y = 1 \end{cases}$$
4.
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ x + y = 5 \end{cases}$$
5.
$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x - y = 5 \end{cases}$$
6.
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$$
7.
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases}$$
8.
$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = 2x - 3 \end{cases}$$

Заключение

Изучение уравнений составляет основу математического образования и является ключевым элементом подготовки к государственной итоговой аттестации. В данном пособии были систематизированы основные типы уравнений — от простейших линейных до сложных тригонометрических и систем уравнений. Каждая глава построена по принципу постепенного усложнения материала: теория сопровождается подробными примерами, акцентируется внимание на типичных ошибках и особенностях экзаменационных заданий.

Уверенное владение методами решения уравнений позволяет не только успешно выполнять задания ЕГЭ, но и развивает логическое, алгоритмическое и аналитическое мышление, необходимое для дальнейшего обучения в вузах и применения математики в профессиональной деятельности.

Пособие предназначено для организации как аудиторной, так и самостоятельной работы учащихся. Регулярное выполнение тренировочных заданий, анализ ошибок и повторение теоретических основ помогут сформировать устойчивые навыки решения уравнений и подготовиться к экзамену на высоком уровне.

Список использованных источников

1. Нормативно-правовые и программные документы
 1. Федеральный закон от 29.12.2012 № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации».
 2. Приказ Министерства просвещения РФ от 31.05.2021 № 287 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования».
 3. Распоряжение Правительства РФ от 24.12.2013 № 2506-р «Об утверждении Концепции развития математического образования в Российской Федерации».
 4. Письмо Министерства просвещения РФ от 12.02.2024 № 03-ПГ-МП-3462 «О направлении методических рекомендаций по преподаванию математики в общеобразовательных организациях».
 5. Приказ Министерства образования Иркутской области от 15.08.2024 № 567-пр «Об утверждении регионального плана мероприятий по реализации Концепции развития математического образования».
 6. Приказ Департамента образования г. Иркутска от 20.08.2024 № 234 «Об организации методической работы в общеобразовательных учреждениях в 2024-2025 учебном году».
 7. Примерная основная образовательная программа основного общего образования (одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию, протокол от 18.03.2022 № 1/22).
2. Источники контрольно-измерительных материалов (КИМ) ГИА
 8. Спецификация контрольных измерительных материалов для проведения основного государственного экзамена по МАТЕМАТИКЕ в 2025 году. ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений» (ФИПИ).
 9. Спецификация контрольных измерительных материалов для проведения единого государственного экзамена по МАТЕМАТИКЕ (базовый уровень) в 2025 году. ФИПИ.
 10. Спецификация контрольных измерительных материалов для проведения единого государственного экзамена по МАТЕМАТИКЕ (профильный уровень) в 2025 году. ФИПИ.
3. Учебно-методическая литература
 14. Кузнецова Л.В., Бунимович Е.А., Пигарев Б.П. Сборник заданий для подготовки к государственной итоговой аттестации в 9 классе. – М.: Просвещение, 2024.
 15. Методическое пособие для учителя «Преподавание алгебры в 7-9 классах». Бурмистрова Т.А. – М.: Просвещение, 2022.
 16. Ященко И.В., Шестаков С.А. ОГЭ. Математика. Типовые экзаменационные варианты. 36 вариантов. – М.: Национальное образование, 2024.
4. Интернет-ресурсы и цифровые платформы
 19. Официальный сайт Федерального института педагогических измерений (ФИПИ). – <https://fipi.ru>
 20. Официальный информационный портал единого государственного экзамена (ЕГЭ). – <http://ege.edu.ru>
 21. Официальный информационный портал государственной итоговой аттестации 9 классов (ГИА-9). – <http://gia.edu.ru>
 22. Открытый банк заданий ОГЭ по математике на сайте ФИПИ.
 23. Образовательный портал «РешуОГЭ» (<https://oge.sdamgia.ru>) и «РешуЕГЭ» (<https://ege.sdamgia.ru>).
 24. Цифровой образовательный ресурс «Российская электронная школа» (РЭШ). – <https://resh.edu.ru>
 25. Сайт Министерства просвещения Российской Федерации. – <https://edu.gov.ru>