

Проект на тему «Стереометрия»

Подготовили:
Ученицы 11 класса
Кондра София
Удовиченко Екатерина
Поддубная Юлия
Руководитель:
учитель математики
Скубченко Татьяна Николаевна

Конкретные задачи для достижения цели:

1. Исследование и систематизация: изучить и систематизировать ключевые понятия стереометрии (тела, поверхности, линии, плоскости, углы, расстояния, сечения, развёртки) и основные формулы для расчёта объёмов и площадей поверхностей различных геометрических тел (призмы, пирамиды, цилиндра, конуса, сферы).
2. Применение на практике: разработать и решить комплексную прикладную задачу, демонстрирующую применение стереометрических знаний для анализа конкретного реального объекта или ситуации.

Конечная цель: углубить теоретические знания и развить практические навыки применения принципов стереометрии для анализа, расчёта и визуализации трёхмерных объектов, а также продемонстрировать их значимость в реальном мире через решение прикладной задачи.

Стереометрия

Стереометрия – раздел геометрии, в котором изучаются свойства пространственных фигур, то есть фигур, не принадлежащих одной плоскости.

В стереометрии рассматриваются различные случаи взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве, такие пространственные фигуры, как призма, пирамида, тела вращения, правильные многогранники и др.

При изучении стереометрии обобщаются некоторые планиметрические понятия: вектор, геометрическое преобразование, прямоугольная система координат и др.

Важными вопросами в стереометрии являются вопросы измерения площадей и объёмов рассматриваемых пространственных фигур.

Многогранник

Многогранник представляет собой геометрическое тело, ограниченное конечным числом плоских многоугольников, любые два из которых, имеющие общую сторону, не лежат в одной плоскости. При этом сами многоугольники называются гранями, их стороны – ребрами многогранника, а их вершины – вершинами многогранника.



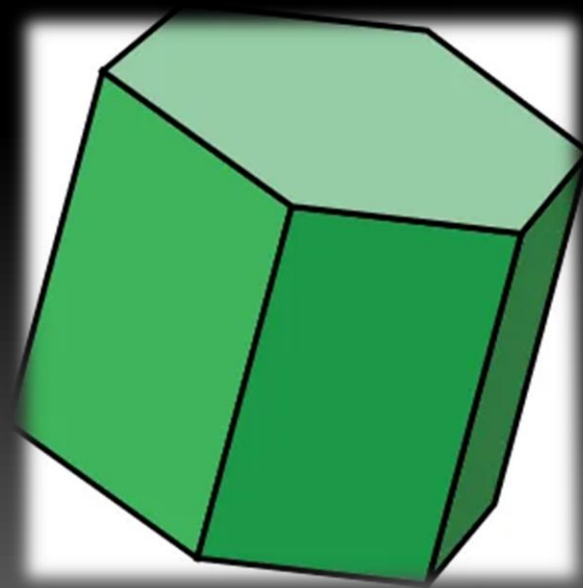
Призма

Призма (n -угольная) – это многогранник, у которого две грани – равные n -угольники, а остальные грани – параллелограммы.

Равные n -угольники называются **основаниями**, а параллелограммы – **боковыми гранями** призмы.

Прямая призма – это призма, у которой боковые грани – прямоугольники.

Правильная n -угольная призма – это призма, у которой все боковые грани – прямоугольники, а ее основания – правильные n -угольники.



Объём призмы

Объём призмы в геометрии — это количество пространства, которое занимает трёхмерное тело, имеющее два основания - многоугольника, лежащих в параллельных плоскостях, и несколько параллельных друг другу рёбер, количество которых равно количеству углов основания.

Универсальная формула: $V = Sh$, где:

V — объём призмы;

S — площадь основания призмы;

h — высота призмы

Частные случаи:

Объём прямоугольной призмы —

$$V = abh$$

Объём правильной четырехугольной призмы (с квадратным основанием) —

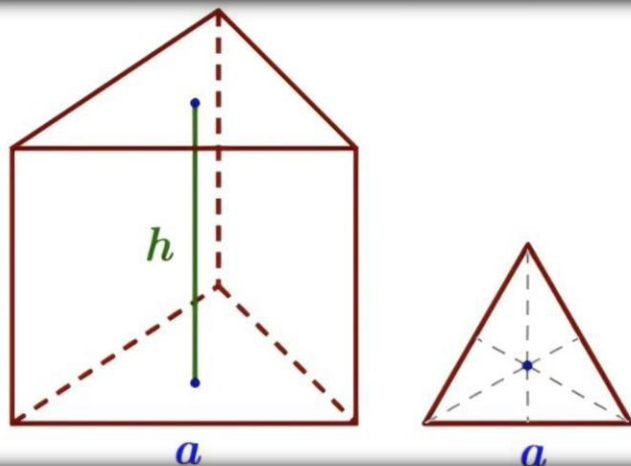
$$V = a^2 h$$

Объём прямой призмы
равен произведению площади
основания на высоту

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h$$

Площадь призмы

В основании равносторонний треугольник



$$S_{\text{осн}} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

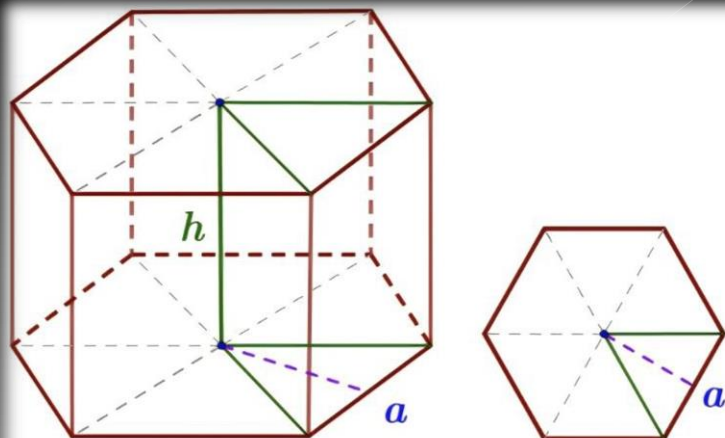
$$S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} \cdot h = 3ah$$

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$$

$$S_{\text{полн}} = 3ah + \frac{\sqrt{3}}{2} a^2$$

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 h$$

В основании правильный шестиугольник



$$S_{\text{осн}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$$

$$S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} \cdot h = 6ah$$

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$$

$$S_{\text{полн}} = 6ah + 3\sqrt{3} a^2$$

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 h$$

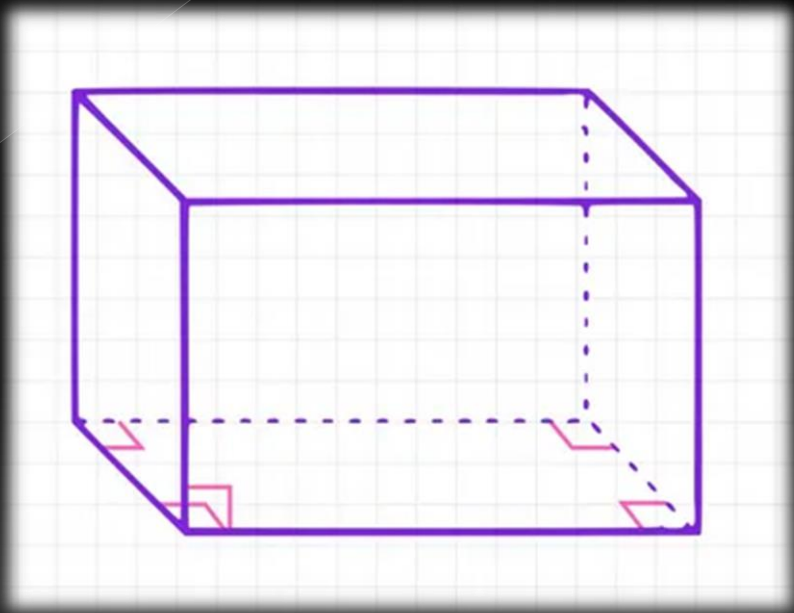
Параллелепипед

Параллелепипед – это многогранник, у которого шесть граней и каждая из них – параллелограмм.

Стороны параллелограммов называются **ребрами** параллелепипеда, а их вершины – **вершинами** параллелепипеда.

Две грани параллелепипеда называются **противолежащими**, если они не имеют общего ребра, а имеющие общее ребро называются **смежными**.

Иногда какие-нибудь две противоположные грани параллелепипеда выделяются и называются **основаниями**, тогда остальные грани – **боковыми гранями**, а стороны, соединяющие вершины оснований параллелепипеда, – его **боковыми ребрами**.



Объём параллелепипеда

Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению трёх его измерений — длины, ширины и высоты. Обозначается заглавной латинской буквой V .

$V = a b c$, где:

V — объём параллелепипеда;

a, b, c — длины трёх его сторон.

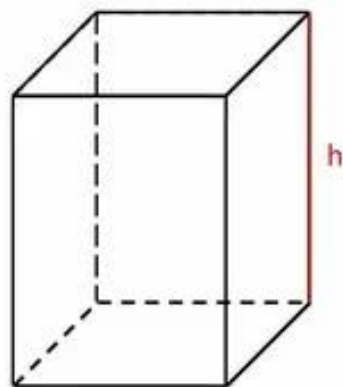
Следствие: объём параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту:

$V = S_{\text{осн}} \times h$, где

$S_{\text{осн}}$ — площадь основания,

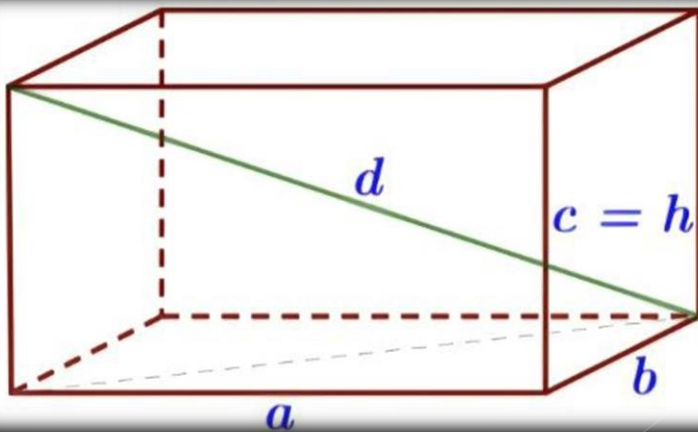
h — высота.

Объём прямого параллелепипеда.



$$V = Sh$$

Основные формулы параллелепипеда для вычислений



$$l_{\text{реб}} = 4(a + b + c)$$

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

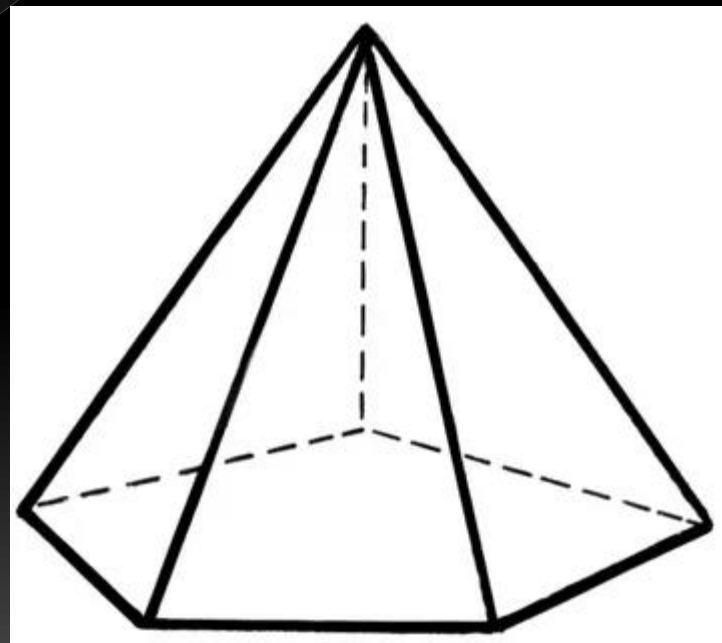
$$S_{\text{бок}} = 2(S_1 + S_2) = 2(ac + bc)$$

$$S_{\text{полн}} = 2(S_1 + S_2 + S_3) = 2(ac + bc + ab)$$

$$V = abc = S_{\text{осн}} \cdot h = abh$$

Пирамида

Пирамида (n -угольная) – это многогранник, у которого одна грань – какой-нибудь n - угольник, а остальные n граней – треугольники с общей вершиной; n -угольник называется **основанием** ; треугольники, имеющие общую вершину, называются **боковыми гранями** , а их общая вершина называется **вершиной пирамиды** . Стороны граней пирамиды называются ее **ребрами** , а ребра, сходящиеся в вершине, называются **боковыми** .



Объём пирамиды

Основная формула:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h$$

Для правильной треугольной

пирамиды — $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot h$,

Для правильной четырёхугольной

пирамиды — $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$.

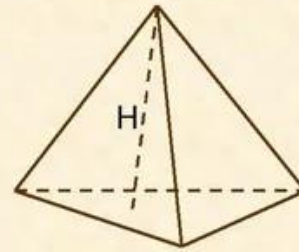
Для правильной шестиугольной

пирамиды — $V = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \cdot h$,

Важно не путать высоту боковой грани и высоту самой

пирамиды: высота пирамиды — это перпендикуляр, опущенный от вершины к основанию, и именно её используют для вычисления объёма. Высота боковой грани — это высота треугольника, образующего боковую поверхность, и для расчёта объёма она не подходит

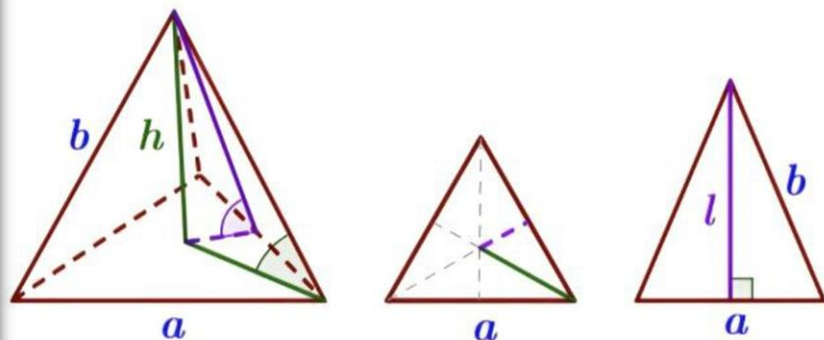
Объём пирамиды



$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$$

Площадь пирамиды

Треугольная пирамида



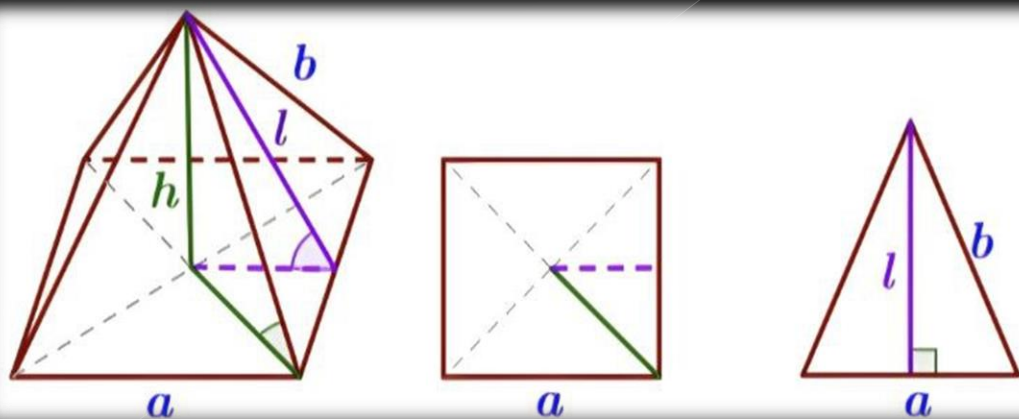
$$S_{\text{осн}} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} \cdot P_{\text{осн}} \cdot l = 1,5al$$

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}} = 1,5al + \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{12} a^2 h$$

Четырехугольная пирамида



$$S_{\text{осн}} = a^2$$

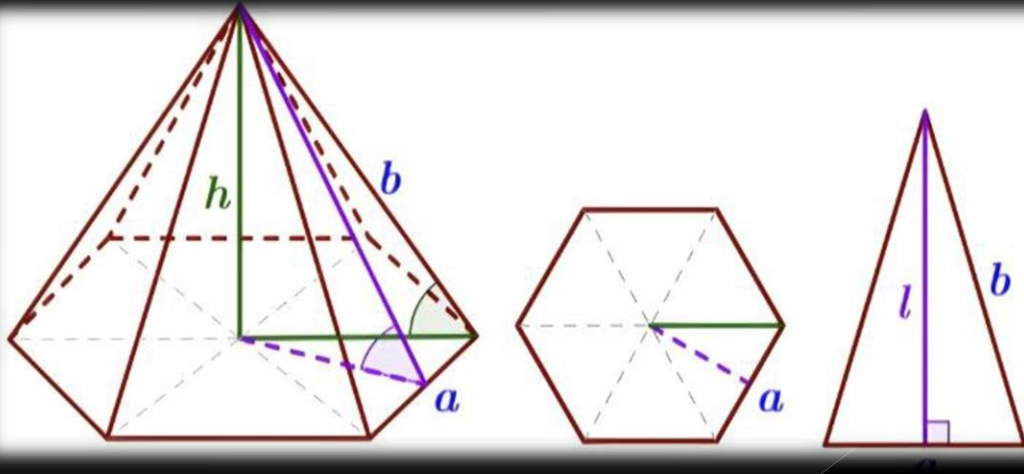
$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} \cdot P_{\text{осн}} \cdot l = 2al$$

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}} = 2al + a^2$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{1}{3} a^2 h$$

Площадь пирамиды

Многоугольная пирамида



$$S_{\text{осн}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$$

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} \cdot P_{\text{осн}} \cdot l = 3al$$

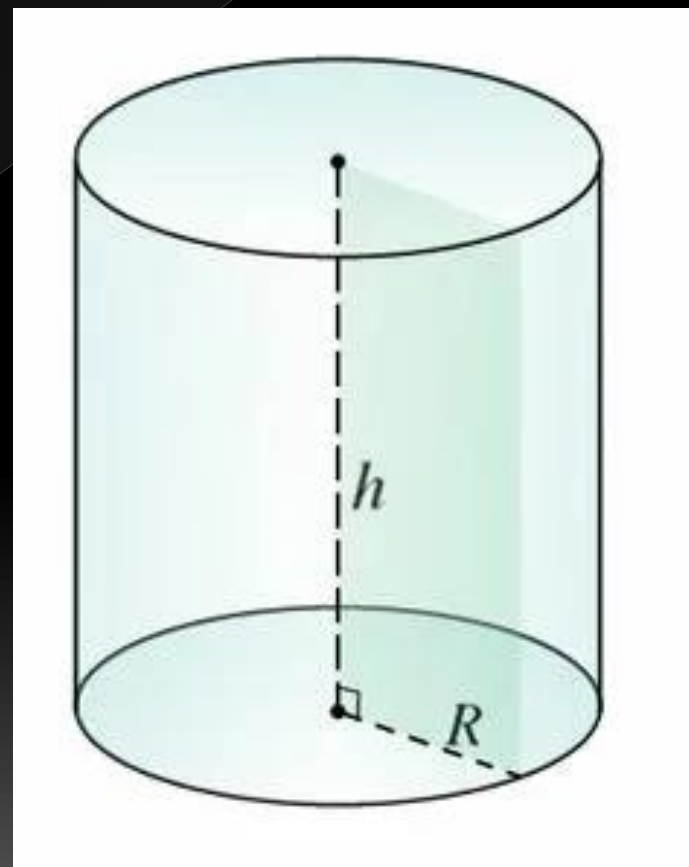
$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}} = 3al + \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 h$$

Важно: не путать апофему с высотой — апофема опускается из вершины боковой грани на сторону основания, а высота пирамиды — из вершины пирамиды на основание

Цилиндр

Цилиндр — геометрическое тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя параллельными плоскостями, пересекающими её.



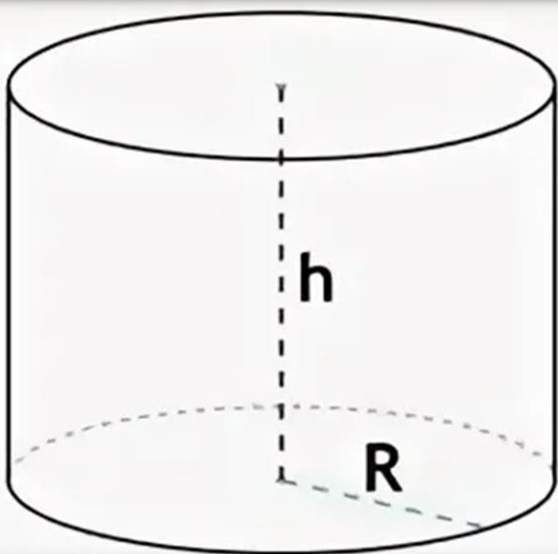
Объём цилиндра

Для **сплошного цилиндра** объём вычисляется по формуле:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h,$$

Для **полого цилиндра** объём рассчитывается по формуле:

$$V = \pi \cdot h \cdot (R^2 - r^2)$$

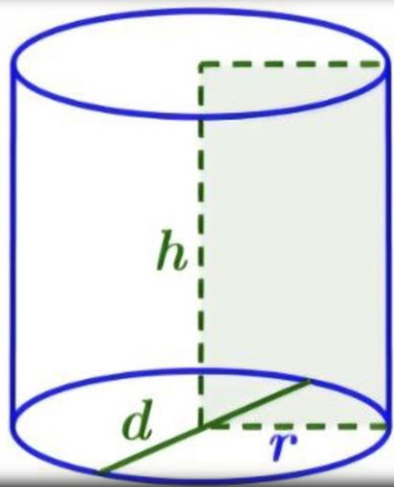


$$V = \pi R^2 h$$

R - радиус основания цилиндра

h - высота цилиндра

Площадь цилиндра



$$S_{\text{осн}} = \pi r^2$$

$$S_{\text{бок}} = 2\pi r h$$

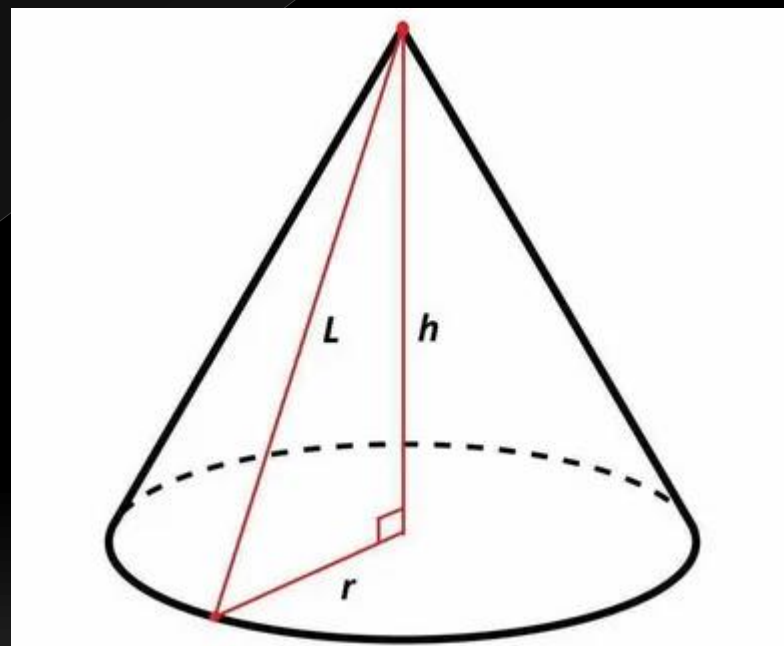
$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}} = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h = \pi r^2 h$$

Конус

Конус — тело, полученное объединением всех лучей, исходящих из одной точки (вершины конуса) и проходящих через плоскую поверхность.

Конус образуется путем вращения прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов.



Объём конуса

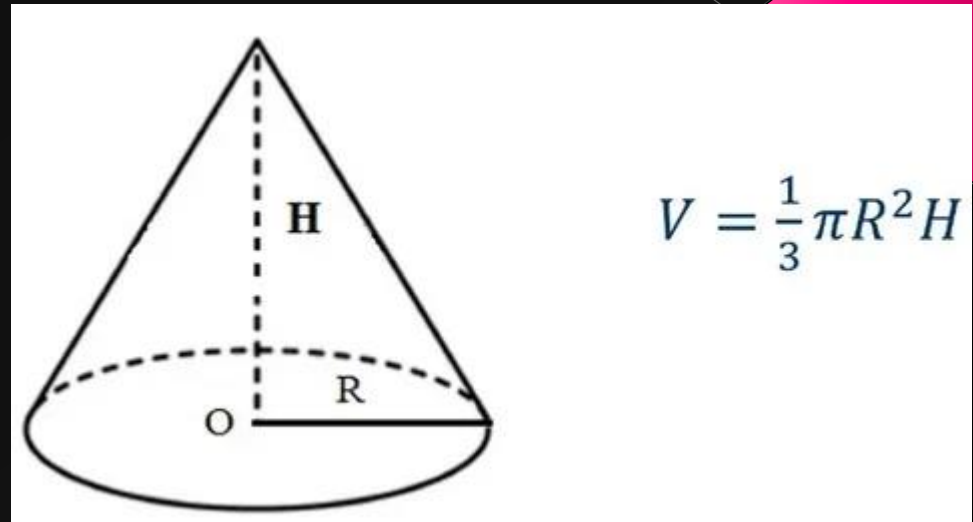
$V = (1/3) \times \pi \times r^2 \times h$, где:

V — объём конуса;

π — число Пи (примерно равно 3,14);

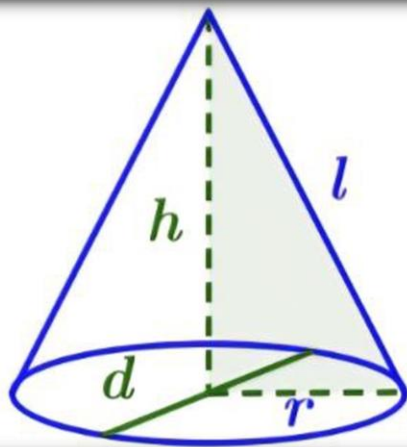
r² — радиус основания в квадрате;

h — высота конуса.



Важно: объём конуса равен ровно одной трети объёма цилиндра с теми же параметрами основания и высоты. Это означает, что объём конуса в 3 раза меньше объёма цилиндра с такими же размерами

Площадь конуса



$$S_{\text{осн}} = \pi r^2$$

$$S_{\text{бок}} = \pi r l$$

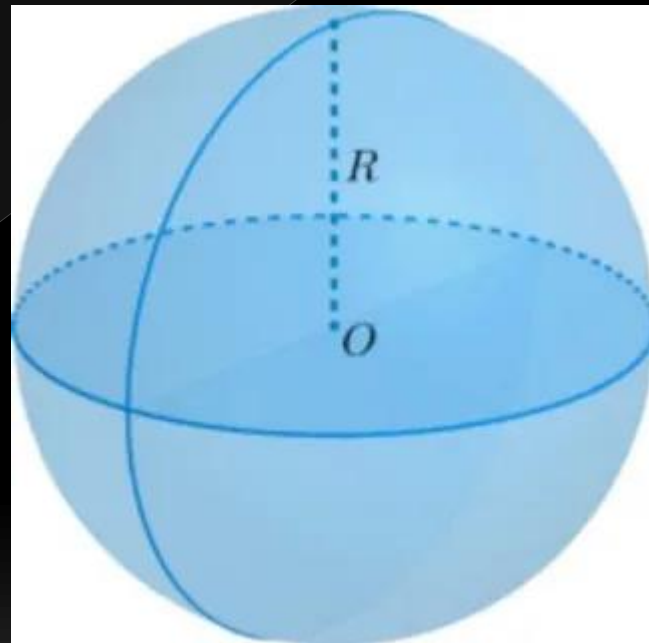
$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}} = \pi r l + \pi r^2 = \pi r(l + r)$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Сфера (шар)

Сфера (поверхность шара) — это совокупность всех точек в трёхмерном пространстве, которые находятся на одинаковом расстоянии от одной точки, называемой центром сферы.

Шар — это совокупность всех точек в трёхмерном пространстве, которые находятся на расстоянии не больше заданного от точки, называемой центром шара. Другими словами, это совокупность точек, ограниченных сферой.



Объём сферы (шара)

Через радиус — $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, где R — радиус шара.

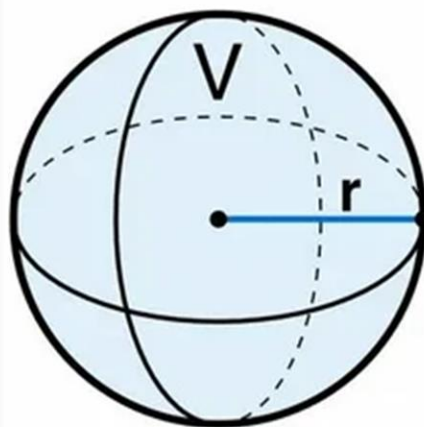
Через диаметр — $V = \frac{1}{6} \cdot \pi D^3$,
где D — диаметр шара
(расстояние от одной стороны шара до противоположной стороны, проходящее через его центр).

Через длину окружности —

$V = \frac{L^3}{6\pi^2}$, где L — длина окружности шара.

Через площадь поверхности —

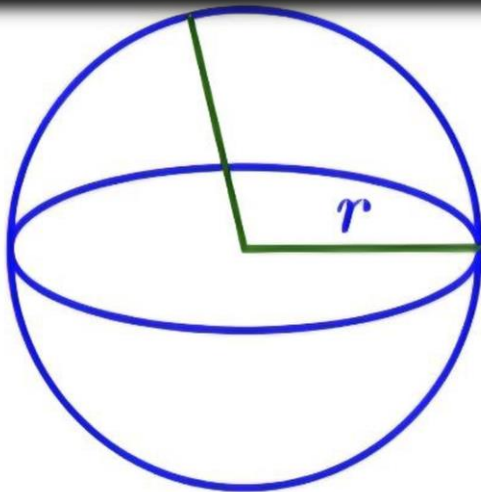
$V = \sqrt{\frac{S^3}{36\pi}}$, где S — площадь поверхности сферы.



r - радиус шара
 V - объем шара
 $\pi = 3,14$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Площадь сферы (шара)



$$S_{\text{пов}} = 4\pi r^2$$

$$S_{\text{сеч}} = \pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Важно:

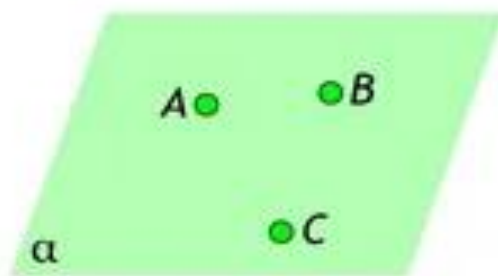
Чем больше радиус, тем большей будет площадь поверхности — площадь пропорциональна квадрату радиуса: при увеличении радиуса в два раза площадь увеличивается в четыре раза.

Неправильное определение радиуса (например, часто радиус шара принимают за диаметр, что неверно — диаметр — это расстояние через центр шара, а радиус — половина диаметра).

Аксиомы стереометрии

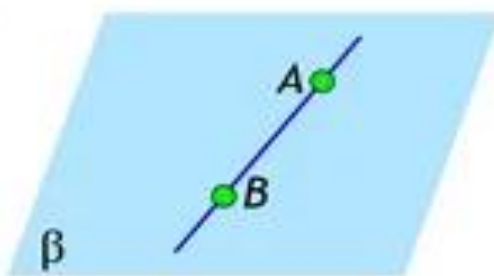
Аксиома 1

Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна



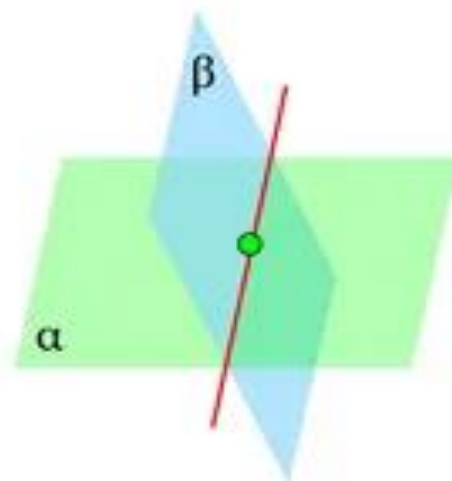
Аксиома 2

Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки этой прямой лежат в этой плоскости



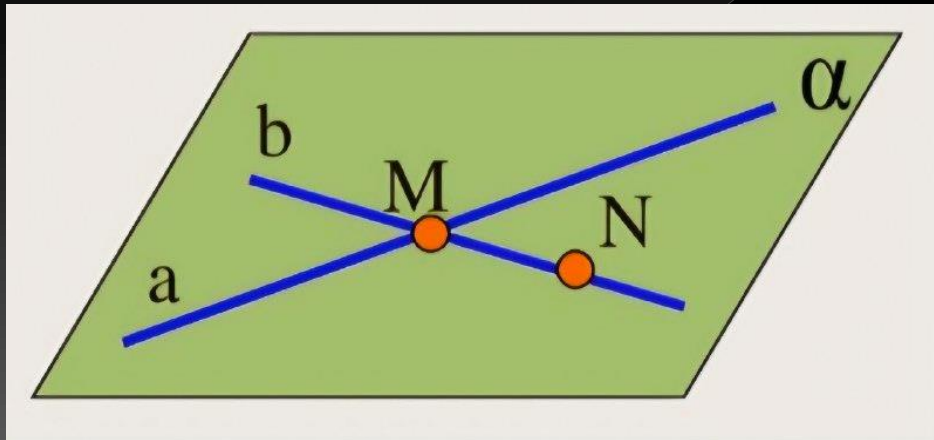
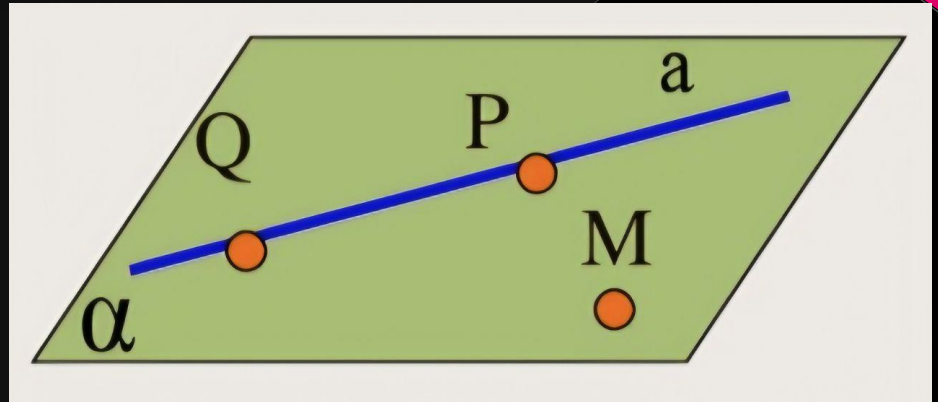
Аксиома 3

Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.



Некоторые следствия из аксиом

Теорема 1. Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна



Теорема 2. Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна

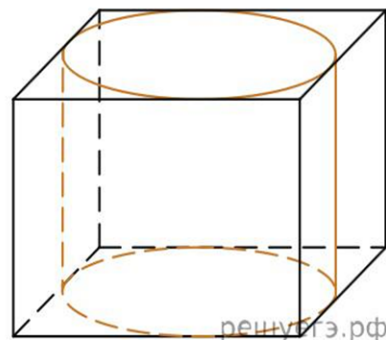
Задания с ЕГЭ

2

Тип 3 № 27041



Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1. Найдите объем параллелепипеда.



Решение.

Высота параллелепипеда равна высоте вписанного в него цилиндра. Основанием параллелепипеда является квадрат, сторона которого в два раза больше радиуса вписанной в него окружности. Поэтому площадь основания равна 4, а объем параллелепипеда равен

$$V_{\text{пар}} = S_{\text{осн}} H = 4 \cdot 1 = 4.$$

Ответ: 4.

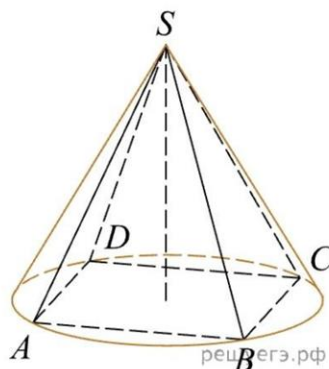
Задания с ЕГЭ

12

Тип 3 № 27123



Конус описан около правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания 4 и высотой 6. Найдите его объем, деленный на π .



Решение.

Квадрат, лежащий в основании пирамиды, вписан в окружность, являющуюся основанием конуса. Поэтому радиус основания конуса r равен половине диагонали квадрата $ABCD$:

$r = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{2}AB}{2} = 2\sqrt{2}$. Тогда для объема конуса, деленного на π , имеем:

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \frac{1}{3} \frac{Sh}{\pi} = \frac{1}{3} \frac{\pi r^2 h}{\pi} = \\ &= \frac{1}{3} r^2 h = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 6 = 16.\end{aligned}$$

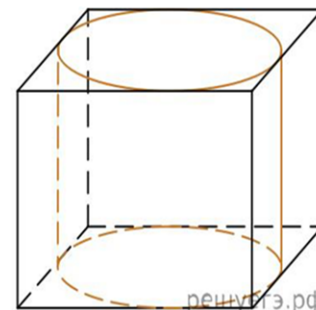
Ответ: 16.

2

Тип 3 № 27041



Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1. Найдите объем параллелепипеда.



Решение.

Высота параллелепипеда равна высоте вписанного в него цилиндра. Основанием параллелепипеда является квадрат, сторона которого в два раза больше радиуса вписанной в него окружности. Поэтому площадь основания равна 4, а объем параллелепипеда равен

$$V_{\text{пар}} = S_{\text{осн}} H = 4 \cdot 1 = 4.$$

Ответ: 4.

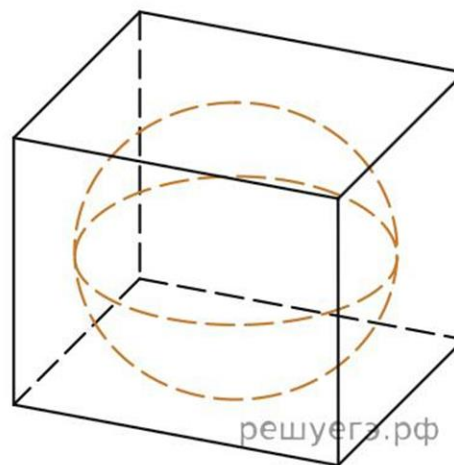
Задания с ЕГЭ

4

Тип 3 № 27043



В куб вписан шар радиуса 1.
Найдите объем куба.



Решение.

Ребро куба равно диаметру вписанного в него шара, а объем куба равен кубу его ребра. Отсюда имеем, что объем куба равен

$$V_{\text{к}} = 2^3 = 8.$$

Ответ: 8.

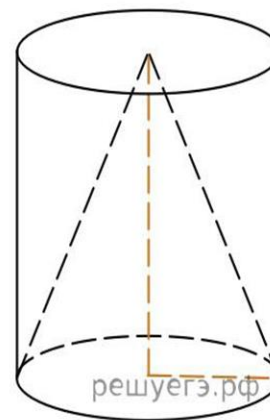
Задания с ЕГЭ

7

Тип 3 № 27051



Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Объем конуса равен 25. Найдите объем цилиндра.



Решение.

Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту, а объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту. Поскольку они имеют общее основание и высоту, объем цилиндра в три раза больше объема конуса.

Ответ: 75.

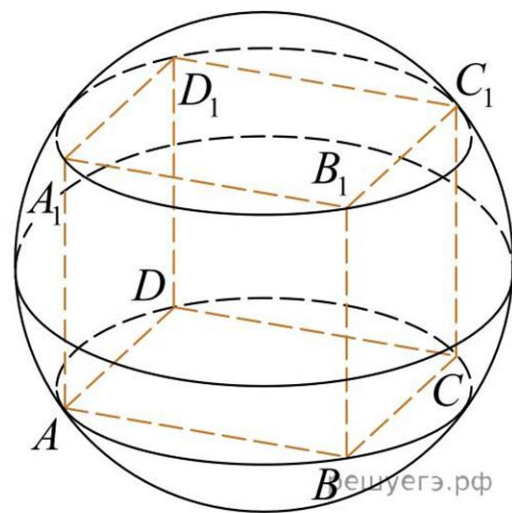
Задания с ЕГЭ

26

Тип 3 № 245355



Куб вписан в шар радиуса $\sqrt{3}$. Найдите объем куба.



Решение.

Диаметр шара, описанного вокруг куба, совпадает с его диагональю и вдвое больше радиуса. Поэтому диагональ куба равна $2\sqrt{3}$. Если ребро куба равно a , то диагональ куба дается формулой $d = a\sqrt{3}$. Следовательно, ребро куба равно 2, а его объем равен 8.

Ответ: 8.

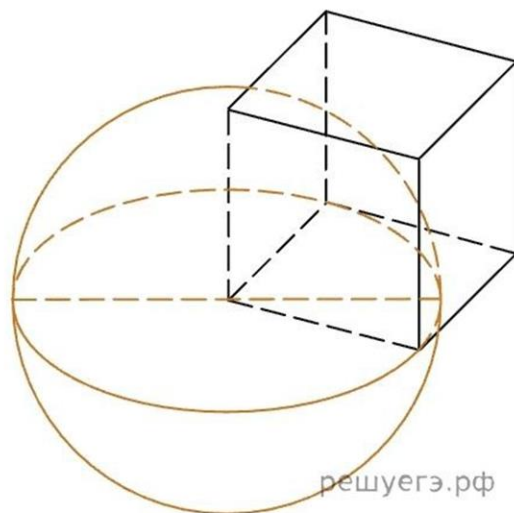
Задания с ЕГЭ

16

Тип 3 № 27206



Вершина A куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 1,6 является центром сферы, проходящей через точку A_1 . Найдите площадь S части сферы, содержащейся внутри куба. В ответе запишите величину S/π .



Решение.

Поскольку ребро куба равно радиусу сферы, в кубе содержится $1/8$ часть сферы и, соответственно, $1/8$ ее поверхности, равная

$$\frac{1}{8}S = \frac{1}{8} \cdot 4\pi R^2 = \frac{\pi}{2} \cdot 1,6^2 = 1,28\pi.$$

Ответ: 1,28.

ВЫВОД:

В ходе выполнения проекта на тему "Стереометрия" мы углубились в изучение трехмерных геометрических фигур, их свойств, формул для вычисления объемов и площадей поверхностей, а также рассмотрели практические задачи, аналогичные тем, которые встречаются на ЕГЭ.

Решение задач из ЕГЭ позволило нам лучше подготовиться к экзамену, развить математическое мышление и навыки решения проблем.

Стереометрия — это не просто набор формул и теорем, а важный инструмент для понимания окружающего мира. Мы увидели, как математические концепции могут быть использованы для решения реальных задач, что делает изучение стереометрии важным и актуальным для каждого ученика.

Таким образом, проект стал не только учебным опытом, но и шагом к более глубокому пониманию математики как науки, способной объяснять и моделировать множество процессов в нашей жизни.