

Семинар по теме «Различные подходы к нахождению расстояния между скрещивающимися прямыми»

Цели урока:

Образовательные: отработать применение теоретических знаний, связанных с нахождением расстояния между скрещивающимися прямыми. Обучение анализу, выдвижению гипотез и предположений, переносу знаний в новые ситуации при решении задач; закрепление навыков использования компьютерной программы GeoGebra для визуализации задач на нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми.

Развивающие: Формирование и развитие у учащихся пространственных представлений, гибкости мышления и способности анализировать предполагаемую конфигурацию.

Воспитательные: воспитание воли и настойчивости для достижения конечных результатов при нахождении расстояния между скрещивающимися прямыми, интереса к изучению математики.

Ход урока:

I. Актуализация знаний учащихся:

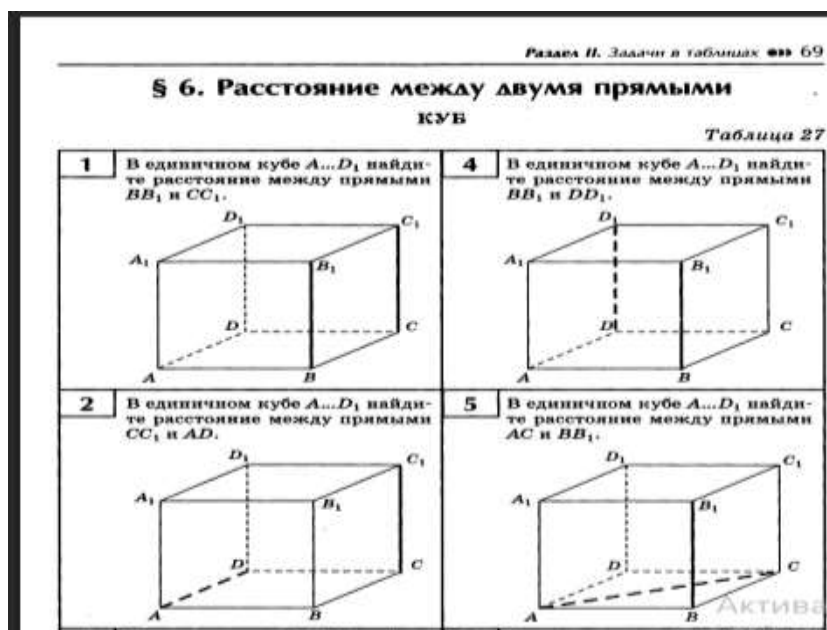
устная работа с ответами на вопросы:

- Какие прямые называются скрещивающимися?
- Какие признаки скрещивающихся прямых известны?
- Что называется расстоянием между скрещивающимися прямыми?
- Как можно находить расстояние между скрещивающимися прямыми, не используя на прямую определение?

II. Работа по готовому чертежу (Метод общего перпендикуляра

Расстояние между скрещивающимися прямыми — это длина их **общего перпендикуляра** — отрезка с концами на этих прямых и перпендикулярного каждой из них.

Данный метод хорошо применять при нахождении расстояния между скрещивающимися прямыми в кубе.



Построение чертежа задачи в программе GeoGebra очень удобно использовать в качестве наглядности для правильного истолкования условия задачи, а также в качестве одного из способов решения или проверки правильности решения

Наглядное представление дает решение задачи, например, для прямой призмы в программе GeoGebra. Каждый ученик класса может узнать, чем занимается другой, и увидеть список задач по одному из этапов решения в одном месте.



III. Разбор задач повышенной сложности.

Метод параллельных плоскостей

Расстояние между скрещивающимися прямыми — это расстояние между двумя параллельными плоскостями, содержащими эти прямые.

Особенности:

Через одну из скрещивающихся прямых проходит ровно одна плоскость, параллельная другой прямой.

Искомое расстояние равно расстоянию от произвольной точки второй прямой до построенной плоскости.

Подборка чертежей куба для отработки навыков учащихся для нахождения перпендикуляра между скрещивающимися прямыми

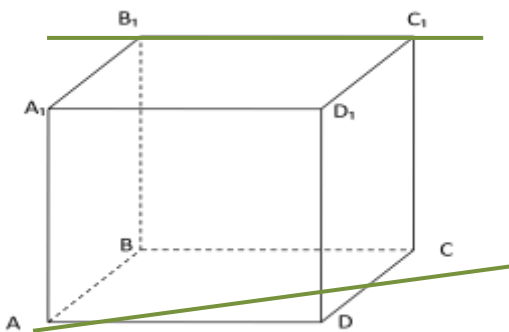


Рис.1

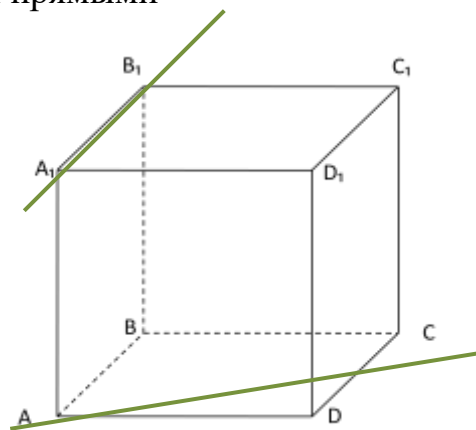


Рис.2

Различия между рисунками:

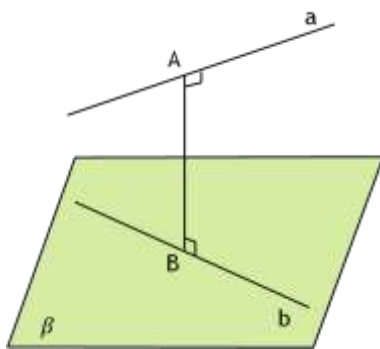
Рис.1: прямая B_1C_1 параллельна плоскости $(ABCD)$, но не обязательно параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости. Это более общее утверждение, так как прямая может быть параллельна плоскости, не будучи параллельной ни одной из прямых в этой плоскости.

Рис. 2: прямая B_1C_1 параллельна прямой, которая лежит в $(ABCD)$, плоскости. Это означает, что прямая B_1C_1 параллельна плоскости $(ABCD)$, так как она параллельна прямой, лежащей в этой плоскости.

Задача нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми одна из самых трудных тем геометрии. Для успешного решения задач данной темы, школьники должны хорошо знать свойства параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей.

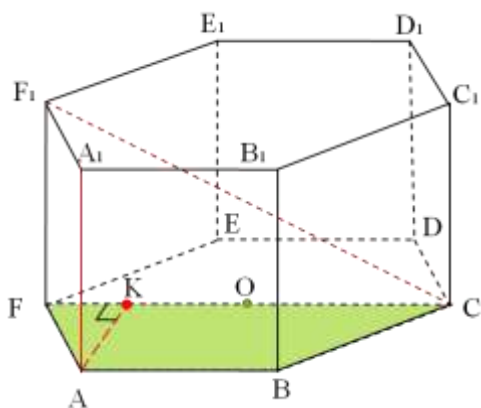
Подборка чертежей пирамиды для отработки навыков учащихся для нахождения перпендикуляра между скрещивающимися прямыми

Метод проекций:



Если одна из двух данных прямых лежит в плоскости, а другая – параллельна этой плоскости, то расстояние между данными прямыми равно расстоянию между прямой и плоскостью.

Задача. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми: AA_1 и CF_1 .



Решение.

1) Прямая FC – проекция прямой $F_1 C$ на плоскость $(ABCDE)$. Расстояние между скрещивающимися прямыми AA_1 и CF_1 равно расстоянию между параллельными плоскостями $(AA_1 B_1 B)$ и $(CC_1 F_1 F)$, в которых лежат эти прямые, значит искомое расстояние это длина отрезка AK .

2) Рассмотрим равнобедренную трапецию $ABCF$.

$CF=2AB=2 \cdot 1=2$; $FK=1/2$; В прямоугольном треугольнике AKF : $AK =$

$$\sqrt{AF^2 - KF^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

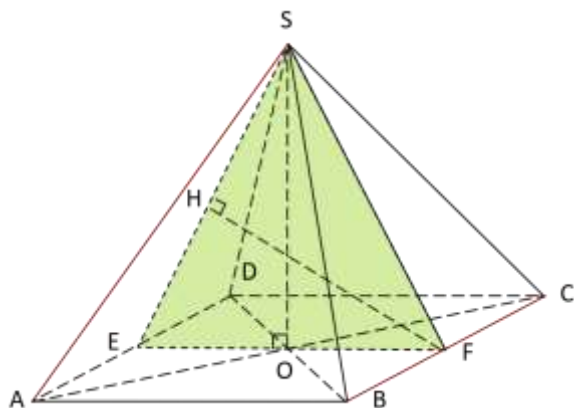
Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Метод параллельных прямой и плоскости

Анализ: воспользуемся утверждением: если одна из двух скрещивающихся прямых лежит в плоскости, а другая — параллельна этой плоскости, то расстояние между данными прямыми равно расстоянию между прямой и плоскостью

Задача.

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми SA и BC .



Решение.

Прямая BC параллельна плоскости SAD , в которой лежит прямая SA .

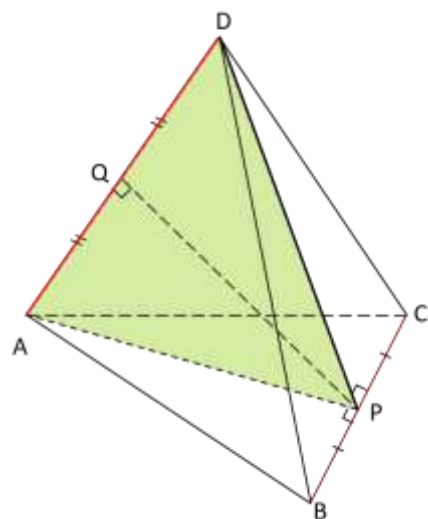
Следовательно, расстояние между скрещивающимися прямыми SA и BC равно расстоянию от прямой BC до плоскости SAD . Пусть E и F соответственно середины ребер AD и BC .

Тогда искомым перпендикуляром будет высота FH треугольника SEF . В треугольнике SEF имеем: $EF = 1$, $SE = SF = \frac{\sqrt{2}}{2}$ высота $SO = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Для площади S треугольника SEF имеют место равенства $2S = EF \cdot SO = SE \cdot FH$, из которых получаем $FH = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

IV. Групповая работа по решению задач, где учащиеся представляют способы нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми, делают рисунок и анализируют условие задачи, высказывают свои предположения, обсуждают и предлагают более рациональный способ решения

Задача (первая группа)



В пирамиде $DABC$ известны длины рёбер $AB = AC = DB = DC = 13$ см, $DA = 6$ см, $BC = 24$ см.

Найдите расстояние между прямыми DA и BC .

Решение.

Пусть P — середина BC , тогда $AP \perp BC$, $DP \perp BC$, поэтому прямая BC перпендикулярна плоскости APD .

$AP = DP$ (поскольку ABC и BDC — равные равнобедренные треугольники). Следовательно,

высота и медиана PQ треугольника APD и будет искомым перпендикуляром.

Найдём $AP = \sqrt{AB^2 + BP^2} = \sqrt{13^2 + 12^2} = 5$ (по теореме Пифагора для треугольника ABP).

Тогда $PQ = \sqrt{AP^2 - AQ^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ (по теореме Пифагора для треугольника PAQ).

Ответ: 4.

Задача (вторая группа)

В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми: AA_1 и $B_1 C_1$.

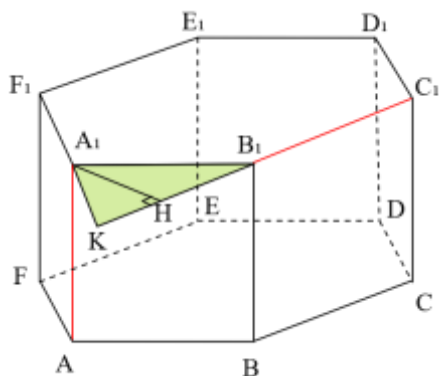
Решение.

Продолжим стороны $B_1 C_1$ и $A_1 F_1$ до пересечения в точке K . Треугольник $A_1 B_1 K$ равносторонний: $\angle C_1 B_1 A_1 = \angle F_1 A_1 B_1 = 120^\circ$, поэтому $\angle K A_1 B_1 = \angle A_1 B_1 K = 60^\circ$.

$KA_1 = KB_1 = AA_1 = 1$. Высота $A_1 H$ - искомый общий перпендикуляр, длину которого найдем по теореме

Пифагора. $A_1 H = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Обсуждение итогов работы в группах, формулировка выводов по изученному материалу.

V. Домашнее задание:

1. В программе GeoGebra для правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$, все рёбра которой равны 1, постройте общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым SA и BC . Найдите его длину.

2. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ все рёбра равны 1.

а) Докажите, что расстояние между прямыми AA_1 и BC_1 равно расстоянию между прямой AA_1 и плоскостью BCC_1 .

б) Найдите это расстояние.

VI. Рефлексия.