

Министерство образования РФ
МАОУ СОШ №35 имени А. Д. Безкровного
г. Анапа, Краснодарский край

МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА ОТКРЫТОГО УРОКА

по математике, 10 класс

раздел: «Математический анализ»

Тема: «Применение производной при решении задач ЕГЭ»

Подготовил: кандидат экономических наук,

учитель математики

Бобок Вероника Сергеевна

Открытый урок по математике в 10 классе

По теме: «»

Тип урока:	Урок повторения, обобщения и систематизации знаний. Урок-практикум
Цель урока:	В рамках повторения изученного необходимо закрепить теоретический материал при решении задач типа №12 (профиль) при подготовке к ЕГЭ
Задачи:	<u>Обучающие</u> - повторить основные понятия, формулы раздела «Производная»; - отработать навык в решении задач на тему «Производная» из вариантов ЕГЭ; - выявить уровень освоения вопросов теории по теме «Производная, а также уровня умений по решению задач на применение знаний о производной». <u>Развивающие</u> - развитие умений в применении знаний в конкретном задании; - развитие логического мышления, умения работать в проблемной ситуации; - развитие познавательного интереса к теме «Производная», развитие памяти и внимательности; - развитие умений сравнивать, обобщать, правильно формулировать задачи и излагать мысли. <u>Воспитательные</u> - воспитание интереса к предмету через содержание учебного материала; - воспитание настойчивости в достижении цели, стремления к успеху, ответственности за качество результатов выполненной работы. <u>Личностные</u> - мотивация на учебный процесс, сдачу экзамена ЕГЭ, самооценка. <u>Регулятивные</u> - умение определять последовательность действий, работать по алгоритму, оценивать правильность выполненных действий. <u>Коммуникативные</u> - выражать свои мысли, точку зрения, умение взаимодействовать с другими обучающимися. <u>Познавательные</u>

- анализ текста задания №12 ЕГЭ. Смысловое чтение, умение находить ответы на вопросы, умение проговаривать последовательность действий и результата работы.

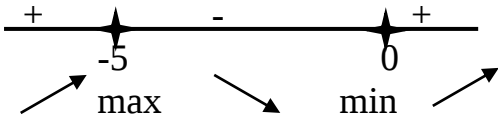
Формы и методы обучения

Методы организации и осуществления учебно-познавательной деятельности	1. Словесные, наглядные, практические. 2. Объяснительно-иллюстративные, поисковые, исследовательские. 3. Использование интерактивных технологий для визуализации и лучшего понимания абстрактных понятий. 4. Решение задач и примеров, связанных с вычислением производных различных функций, применение правил дифференцирования, нахождением экстремумов и точек перехода, а также решением сложных задач. 5. Обсуждение сложных вопросов, разбор ошибок, углубленное изучение отдельных аспектов темы.
Требования к результатам усвоения учебного материала	<u>Ученики должны знать:</u> - производные основных элементарных функций; - правила дифференцирования; - правила применения производной к исследованию функций; - геометрический и физический смысл производной. <u>Ученики должны уметь:</u> - решать задачи на нахождение производной функции №12 ЕГЭ (профиль); - применять производную к исследованию функций.
Оборудование: План урока	Компьютер, мультимедиа проектор, презентация. 1. Организационный момент (1 мин.). 2. Постановка цели и задач урока (2 мин.). 3. Актуализация изучения темы. Теоретический фундамент – повторение основных понятий, формул и правил по теме «Производная» (10 мин.). 4. Практикум: решение ключевых типов задач №12 из ЕГЭ (профиль) – 15 мин. 5. Самостоятельная работа учащихся – решение задач ЕГЭ (профиль) – 7 мин. 6. Проверка результатов самостоятельной работы (2 мин.). 7. Домашнее задание (1 мин.). 8. Подведение итогов урока (2 мин.).

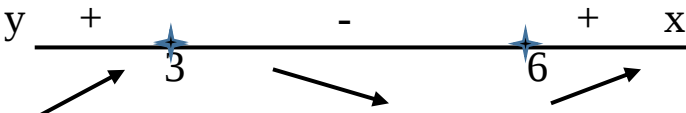
ХОД УРОКА

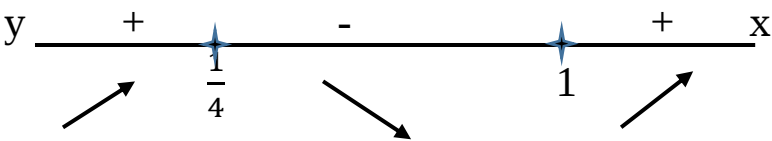
1. Организационный момент	
Учитель:	Добрый день, уважаемые ученики 10-го класса! Сегодня у нас открытый урок по теме: «Производная в заданиях ЕГЭ. Профиль математики». Многие из вас уже легко выполняют задание №12 из профильной части. Сегодня на уроке мне хотелось, чтобы вы показали свои знания, навыки и умения в решении многих задач производной, тем самым продемонстрировав высокий уровень подготовки к ЕГЭ и доказав, что к концу 10 класса вы полностью решаете первую часть ЕГЭ и можете набрать уже 70 баллов
2. Цель урока	
Учитель:	Сегодня на уроке мы должны закрепить теоретический материал: основные формулы вычисления, производную степенной функции, производные некоторых элементарных функций, правила дифференцирования, производную сложной функции, а также применение производной к исследованию функций. Наша с вами задача заключается показать алгоритм выполнения задания №12 профильной математики ЕГЭ.
3. Актуализация изучения темы	
Учитель:	Обратимся к истории возникновения понятия производной. Основным понятием дифференциального исчисления является производная. Производная появилась в XVII в. в связи с потребностью вычисления огромного количества задач из математики, физики и механики, основными из которых являются вычисления скорости прямолинейного неравномерного движения и построения касательной к произвольной плоскости кривой. Задача вычисления скорости прямолинейного неравномерного движения впервые была решена <u>Ньютоном</u>. Для обозначения функций Ньютон прибег к последним буквам латинского алфавита u, x, y, z, а их производные – соответственно теми же буквами с точкой над ними u', x', y', z'. В начале XVII в. множество учёных, в том числе Торричелли, Вивiani, Роберваль, Барроу, трудились

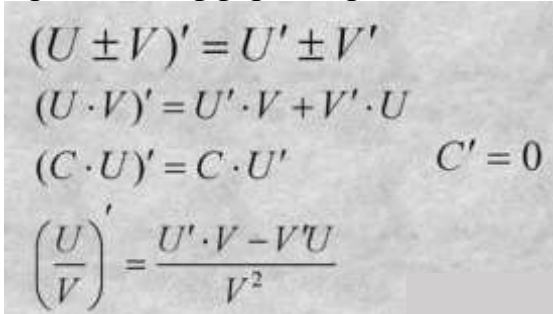
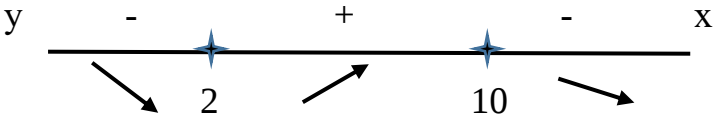
	над решением вопроса, прибегая к кинематическим суждениям. Первый общий метод построения касательной к алгебраической кривой был опубликован в «Геометрии» Декарта. Более универсальным и значительным для становления дифференциального исчисления был метод построения касательной Ферма. Лейбниц, опираясь на научные работы Ферма и некоторые другие выводы, значительно более полное своих последователей нашёл решение задач, о котором идёт речь, сформулировал собственный метод. Через dx, Лейбниц обозначил приращение абсциссы, а через dy приращение ординаты. Используемый ныне символ производной берёт своё начало именно от Лейбница. Однако у Лейбница основным понятием была не производная, для которой он даже специального термина не имел, а дифференциал. Леонард Эйлер в середине XVIIIв. Начал использовать греческую букву Δ (дельта), для обозначения приращений переменных величин, т.е. $\Delta y = y_2 - y_1$; $\Delta x = x_2 - x_1$ и т.д. Данное обозначение сохранилось и поныне. Мы пишем $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ Используемые нами современные обозначения y' и $f'(x)$ ввёл Лагранж в 1791. Жозеф Луи Лагранж выполнил важные работы по алгебре и теории чисел, а также по проблеме решения дифференциальных уравнений. Производная Коши является ключевым понятием в комплексном анализе, тесно связанным с понятием аналитичности. Её свойства применяются в интегральной формуле.
Учитель:	Задания 12 в профильной ЕГЭ по математике обычно проверяют умение находить наибольшее/наименьшее значения функции, а также решать уравнения и неравенства, связанные с производной. Алгоритм решения обычно включает в себя нахождение производной, определение критических точек, исследование знаков производной и нахождение экстремумов.
Вопрос учителя:	Как найти наибольшее/наименьшее функции, точку максимума, точку минимума?

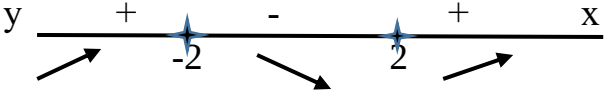
	Что такое производная?
Ответ ученика:	Производная – это скорость нашей функции. Что такое точки экстремума и как они связаны с производной, на самом деле, если говорить простым языком, то точки экстремума – это точки, в которых функция меняет своё направление. Производная в этих точках равна 0, так как скорости в этих точках нет (ведь функция меняет направление). Осталось понять нахождение точек. Это точки максимума или минимума. Для этого мы чертим координатную прямую, на которой отмечаем наши точки. И подобно методу интервалов ставим «++» или «-+»
 Запомним, если производная возрастает и начинает убывать, то это точка максимума, наоборот – минимума.	
Вопрос учителя:	Кто сейчас расскажет детальный алгоритм выполнения №12 задания в профильной математике?
Ответ ученика:	Нахождение производной. Вычислить производную $f'(x)$ от заданной функции Нахождение критических точек. Приравнять производную к нулю $f'(x)=0$ и решить уравнение. Найдите корни (критические точки), которые принадлежат заданному отрезку или являются точками возможного экстремума. Исследование функции на монотонность. - Разбейте числовую прямую на интервалы с помощью найденных корней (критических точек). - Определите знак производной на каждом интервале. Если $f'(x)>0$, то функция возрастает; если $f'(x)<0$ то функция убывает. Определение точек экстремума. - Если при переходе через критическую точку производная меняет знак с «-» на «+», то это точка минимума.

	5. Нахождение наибольшего/наименьшего значения. - Если требуется найти наибольшее или наименьшее значение на отрезке подставьте в исходную функцию $f(x)$ значения концов отрезка и значения точек экстремума, найденные на шаге 4. - Выведите наибольшее или наименьшее значение из полученных, в зависимости от условия задачи.
Дополнительные замечания учителя	- В некоторых случаях задача может потребовать, использования тригонометрических формул или других математических преобразований для упрощения функции перед нахождением производной. - Важно внимательно читать условие задачи, чтобы определить, что требуется найти: наибольшее или наименьшее значение функции, или точки максимума/минимума.
Учитель	Чтобы правильно выполнить 12 задание ЕГЭ нужно знать не только последовательность действий, но и специальные формулы с помощью которых производная от функции вычисляется достаточно просто (слайд).
Объяснение на доске учителем некоторых формул	
	Примеры
1) $(\text{const})' = 0$	$(5)' = 0; (2,5)' = 0; (\frac{1}{3})' = 0$
2) $(x)' = 1$	$(5x)' = 5; (\frac{1}{2} x)' = \frac{1}{2}$
3) $(x^n)' = nx^{n-1}$	$(x^5)' = 5x^{5-1} = 5x^4$
4) $(kx^h)' = knx^{h-1}$	$(3x^4)' = 3 \cdot 4x^{4-1} = 12x^3$ $(\frac{1}{2}x^4)' = \frac{1}{2} \cdot 4x^{4-1} = 2x^3$
5) $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})'$	$\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
6) $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$	$y'(x) = \left(\frac{\ln x}{3}\right)' = \frac{1}{3} (\ln(x))' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{3x}$
Учитель	Теперь рассмотрим эти формулы в решении заданий ЕГЭ
Интерактивная доска. Сборник вариантов ЕГЭ Яценко, 2025 (профиль)	

Пример 1	Найдите наименьшее значение функции $Y = x\sqrt{x-27x+6}$ $y' = x \cdot x^{\frac{1}{2}} - 27x + 6 = (x^{\frac{3}{2}})' - (27x)' + (6)' = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} - 27 =$ $= \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 27$ $y' = 0; 1,5x^{\frac{1}{2}} - 27 = 0; 1,5\sqrt{x} = 27; \sqrt{x} = 27: \frac{15}{10} = \frac{27 \cdot 10}{15} = 18$ $(\sqrt{x})^2 = (18)^2; x = 324$
Учитель	Прочитаем ещё раз задание. Что требуется найти?
	$y(324) = 324\sqrt{324-27 \cdot 324+6} = 5832-8748+6 = -2910$ Ответ в бланк ЕГЭ: -2910
Пример 2 Объяснения учителя	Найдите: точку максимум функции $y = 1,5x^2 - 27x + 54\ln x - 7$ $y' = 3x - 27 + \frac{54}{x}; \quad y'' = 0; \quad x^2 - 9x + 18 = 0;$ $3x^2 - 27x + 54 = 0; \quad x^2 - 9x + 18 = 0$ $D = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4 \cdot 18 = 81 - 72 = 9; \quad D > 0$ $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{9+3}{2} = \frac{12}{2} = 6; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{9-3}{2} = \frac{6}{2} = 3$ Определим знаки производной  В точке $x=3$ производная $y'(x)$ меняет знак с «плюса» на «минус». Значит $x=3$ – точка максимум функции. Ответ: $x=3$
Пример 3 Комментированное решение у доски	Найдите наименьшее значение функции $y = 2x^2 - 5x + \ln x - 3$ $y' = 4x - 5 + \frac{1}{x} = 0 \quad / \cdot x$ $y' = 0; 4x^2 - 5x + 1 = 0; D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 4 =$ $= 25 - 16 = 9; \quad D > 0$ $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{5+3}{2 \cdot 4} = \frac{8}{8} = 1; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{5-3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{9+3}{2} = \frac{12}{2} = 6; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{9-3}{2} = \frac{6}{2} = 3$

	 В точке $x=1$ производная $y'(x)$ меняет знак с «минус» на «плюс», значит $x=1$ – точка минимум функции, но так как требуется найти наименьшее функции, то это значение в первоначальные условия: $y(1) = 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + \ln 1 - 3 = 2 - 5 + 0 - 3 = -6$
Учитель	Теперь давайте вспомним, как высчитывается сложная функция!? (слайд) $h(x) = g'(f) \cdot f'(x)$ - для этого нужно определить внутреннюю и внешнюю элементарные функции $f(x)$ и $g(f)$; - Найти производную внутренней функции $f'(x)$; - найти производную внешней функции $g'(f)$; - перемножить производные внутренней и внешней функций и получить производную сложной функции $h(x) = g'(f) \cdot f'(x)$ Вычислим: $y = (5x - 3)^3$ $y' = [(5x - 3)^3]' = 3(5x - 3)^2 \cdot (5x - 3)' = 3(5x - 3)^2 \cdot 5 = 15(5x - 3)^2$ $y = \sin(4x + 8)$ $y' = [\sin(4x + 8)]' = \cos(4x + 8) \cdot (4x + 8)' = \cos(4x + 8) \cdot 4 = 4\cos(4x + 8)$ $y = (2x + 3)^5$ $y' = [(2x + 3)^5]' = 5(2x + 3)^4 \cdot (2x + 3)' = 5(2x + 3)^4 \cdot 2 = 10(2x + 3)^4$
Решение учеников у доски	$y = e^{2x^3+5}$ Внешняя функция – это экспонента $(e^x)' = e^x$, а внутренняя функция – квадратный многочлен $(2x^3+5)$ $y' = e^{2x^3+5} = e^{2x^3+5} \cdot (e^{2x^3+5})' = e^{2x^3+5} \cdot 6x^2$ $y = \ln(2x^2 + 3)^6$ Внешняя функция - $\ln(x)^2 = \frac{1}{x}$

	Внутренняя функция - это квадратный многочлен $(2x^2 + 3)^6$ $y' = (2x^2 + 3)^6 = \frac{1}{(2x^2 + 3)^6} [(2x^2 + 3)^6]' * (2x^2 + 3)'$ $= \frac{1}{(2x^2 + 3)^6} 6 * (2x^2 + 3)^5 * 4x = \frac{24x(2x^2 + 3)^5}{(2x^2 + 3)^6} = \frac{24x}{2x^2 + 3}$ В решении задания №12 нужно хорошо знать производную сложной функции и ещё правила дифференцирования, которые очень часто применяются в заданиях профильного уровня.
	Правила дифференцирования 
Учитель показывает ход решения на доске с комментированным решением	Пример 4. Найдите наименьшее значение функции $y = (x^2 - 10x + 10)e^{2-x}$ $y' = (x^2 - 10x + 10)'e^{2-x} + (x^2 - 10x + 10)(e^{2-x})' =$ $= (2x - 10)(e^{2-x}) + (x^2 - 10x + 10)e^{2-x}(-1) =$ $= (2x - 10)e^{2-x} - (x^2 - 10x + 10)e^{2-x} = e^{2-x}(2x - 10 - x^2 + 10x - 10); e^2 > 0$ $y' = 0 \quad 2x - 10 - x^2 + 10x - 10$ $x^2 - 12x + 20 = 0$ $x_1 = 2; x_2 = 10$ Определим знаки производной  В точке $x=2$ производная $y'(x)$ меняет знак с «минуса» на «плюс», значит $x=2$ – точка минимума функции, $y(2) = (2^2 - 10 \cdot 2 + 10)e^{2-2} = 4 - 20 + 10 \cdot e^0 = -6 \cdot 1 = -6$ Ответ: -6

Учитель	Дорогие ученики, давайте рассмотрим ещё одно задание по формулам дифференцирования. Пример 5. Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{2x^2 - 9x + 8}{x}$ $y' = \frac{(2x^2 - 9x + 8)' \cdot x - (2x^2 - 9x + 8) \cdot x'}{x^2} =$ $= \frac{4x^2 - 9x - 2x^2 + 9x - 8}{x^2} = \frac{2x^2 - 8}{x^2}$ $y' = 0 \quad \frac{2x^2 - 8}{x^2} = 0; \quad 2x^2 - 8 = 0; \quad 2x^2 = 8; \quad x^2 = 4;$ $x_1 = 2; \quad x_2 = -2$ Определим знаки производной  В точке $x=2$ производная $y'(x)$ меняет знак с «минуса» на «плюс» значит $x=2$ тогда точка минимум определили, теперь нужно полученное значение подставить в начальные условия и мы получим минимальное значение функции: $(2) = \frac{2 \cdot 2^2 - 9 \cdot 2 + 8}{2} = \frac{8 - 18 + 8}{2} = \frac{-2}{2} = -1$ Ответ: -1
4. Практикум: решение ключевых типов задач №13 из ЕГЭ (профиль)	
Учитель	Можно сделать вывод, что производная – одно из самых важных понятий математического анализа. Знание производной позволяет решать многочисленные задачи по алгебре, геометрии, физике. Прошу вас уважаемые ученики показать ваши знания, навыки и умения в решении задач.
Ученик 1.	Комментированное решение. Найдите точку максимума функции $y = (x - 14)^2 e^{26 - x}$

В этом задании перед нами производная сложной функции и в расчётах применим формулу дифференцирования.

$$y' = [(x-14)^2]e^{26-x} + (x-14)^2 * (e^{26-x})' =$$

$$= 2(x-14)e^{26-x} - (x-14)^2 e^{26-x}$$

$$y' = 0; e^{26-x} > 0$$

$$2(x-14) - (x-14)^2 = 0$$

$$2x - 28 - (x^2 - 28x + 196) = 0$$

$$2x - 28 - x^2 + 28x - 196 = 0$$

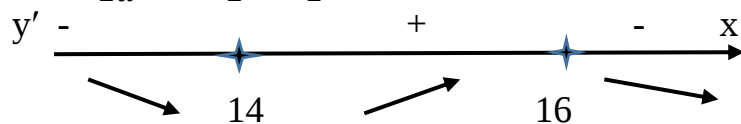
$$-x^2 + 30x - 224 = 0 \quad (-1)$$

$$x^2 - 30x + 224 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (30)^2 - 4 * 224 = 900 - 896 = 4$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{30 + 2}{2} = \frac{32}{2} = 16$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{30 - 2}{2} = \frac{28}{2} = 14$$



В точке $x=16$ производная $y'(x)$ меняет знак с «плюса» на «минус», значит $x=16$ является точкой максимума функции.

Ответ: 16

Ученик 2.

Найдите наименьшее значение функции

$$y = 4x^2 - 10x + 2\ln x - 5 \text{ на отрезке } [0,3; 3]$$

Решение:

Найдём производную функции

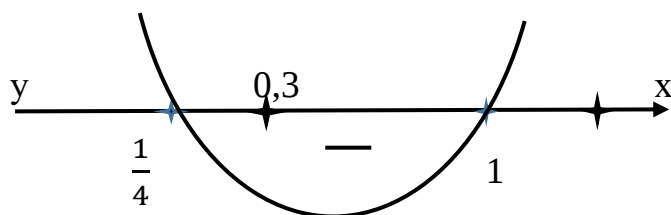
$y = 4x^2 - 10x + 2\ln x - 5$ и приравняем её к нулю

$$y'(x) = 8x - 10 + \frac{2}{x}; y'(x) = 0$$

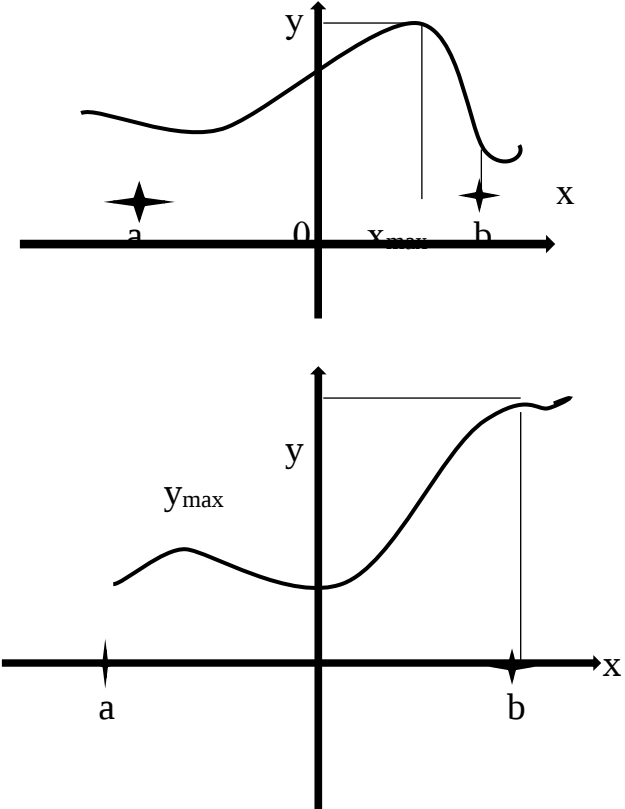
$$8x - 10 + \frac{2}{x} = 0/x; 8x^2 - 10x + 2 = 0/2; 4x^2 - 5x + 1 = 0;$$

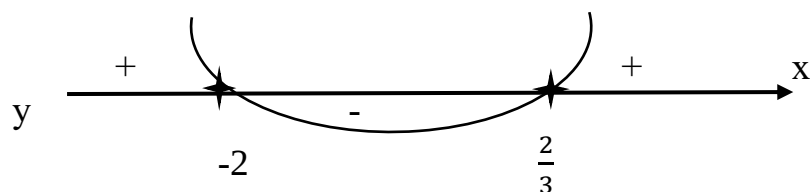
$$x_1 = 1; x_2 = \frac{1}{4}$$

Найдём знаки производной



Точка $x_1 = 1$ – точка минимума функции $y(x)$, точка $x_2 = \frac{1}{4}$

	Не лежит на отрезке $[0,3; 1]$. Поэтому $y(0,3) > y(1)$ и $y(3) > y(1)$ значит наименьшее значение функции на отрезке $[0,3; 1]$ достигается при $x=1$. Найдём это значение: $Y_{\min}(x) = y(1) = 4 - 10 - 5 = -11$ Ответ: -11
Ученик 3.	Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 + 2x - 4x + 4$ на отрезке $[-2; 0]$ Решение: Мы помним, что наибольшее значение функции на отрезке может достигаться либо в точке максимума, либо на конце отрезка. Эти случаи показаны на рисунках:  Будем искать точку максимума функции $y = x^3 + 2x - 4x + 4$ с помощью производной. Найдём производную и приравняем её к нулю: $y' = 3x^2 + 4x - 2$ $y' = 0 \quad 3x^2 + 4x - 2 = 0; D = 64; x = \frac{-4 \pm 8}{6}$ $x_1 = \frac{2}{3}; x_2 = -2$ Найдём знаки производной



В точке $x=-2$ производная равна нулю и меняет знак с «+» на «-». Значит, $x=-2$ – точка максимума функции $y(x)$. Поскольку при $x \in [-2; 0]$ функция $y(x)$ убывает, $y_{\max}(x)=y(-2)=12$

В этой задаче значение функции на концах отрезка искать не нужно.

Ответ: 12

Ученик 4.

Найдите наибольшее значение функции

$$y(x)=14x-7\operatorname{tg}x-3,5\pi+11 \text{ на отрезке } \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$$

Решение:

Найдём производную функции

$$y(x)=14x-7\operatorname{tg}x-3,5\pi+11$$

$$y'(x)=14 - \frac{7}{\cos^2 x}$$

Приравняем производную к нулю.

$$14 - \frac{7}{\cos^2 x} = 0 / \cos^2 x; \quad 14 \cos^2 x - 7 = 0; \quad 14 \cos^2 x = 7;$$

$$\cos^2 x = 7; \quad \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

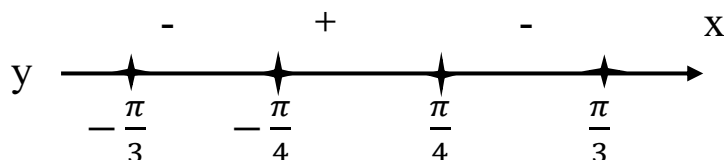
$$\text{Поскольку } x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right], \quad y'(x) = 0$$

$$\text{Если } x = \pm \frac{\pi}{4}$$

Найдём знаки производной на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$

$$y'(0) = 14 - 7 = > 0$$

$$y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = y'\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 14 - 28 < 0$$



При $x=\frac{\pi}{4}$ знак производной меняется с «плюса» на «минус». Значит, $x=\frac{\pi}{4}$ – точка максимум функции $y(x)$.

	Мы нашли точку максимума, но это ещё не всё. Сравним значения функции в точке максимума и на конце отрезка, т.е. при $x = -\frac{\pi}{3}$; $x = \frac{\pi}{4}$ $y\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 = -7 + 11 = 4$ $\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{14\pi}{3} + 7\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - 3,5\pi + 11 < 4$ Мы нашли, что $Y_{\max}(x) = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -7 + 11 = 4$ Заметим, что если вам попадётся такая задача в первой части ЕГЭ по математике, то находить значение функции при $-\frac{\pi}{3}$ не обязательно. Как мы видим, это значение – число иррациональное. А в первой части ЕГЭ по математике ответом может быть только целое число или конечная десятичная дробь. Ответ: 4
Ученик 5	Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 8e^x + 9$ на отрезке $[0; 2]$. Решение: Снова сложная функция. Запишем полезные формулы: $(e^{-x})' = -e^{-x}$ $(e^{cx})' = e^{cx} \cdot c$ $(e^{x+a})' = e^{x+a}$ Найдём производную функции $y = e^{2x} - 8e^x + 9$ $y' = 2e^{2x} - 8e^x = 2e^x(e^x - 4);$ $y' = 0, \text{ если } e^x = 4, \text{ тогда } x = \ln 4.$ $0 < \ln 4 < 2$. Гиб $x = \ln 4$ знак производной меняется с «минуса» на «плюс». Значит, $x = \ln 4$ – точка минимума функции $y(x)$. $y(\ln 4) = 4^2 - 8 \cdot 4 + 9 = 16 - 32 + 9 = -7$ Ответ: -7
Учитель	Давайте рассмотрим и решим ещё одно задание ЕГЭ с тригонометрической функцией и корнем квадратным.
Ученик 6.	Найдите наибольшее значение функции $y = 12\cos x + 6\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}\pi + 6$ на отрезке $[0; \frac{\pi}{2}]$ Решение: Как всегда возьмём производную функции и приравняем её к нулю. $y'(x) = -12\sin x + 6\sqrt{3}$

$y' = 0; -12 \sin x = -6\sqrt{3}; \sin x = \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ По условию, $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$. На этом отрезке условие $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ выполняется только для $x = \frac{\pi}{3}$. Найдём знаки производной слева и справа от точки $x = \frac{\pi}{3}$. $y'(0) = 6\sqrt{3} > 0; y'(\frac{\pi}{2}) = -12 + 6\sqrt{3} < 0$ В точке $x_0 = \frac{\pi}{3}$ производная функции меняет знак с «плюса» на «минус». Значит, точка $x_0 = \frac{\pi}{3}$ - точка максимума функции $y(x)$. Других точек экстремума на отрезке $[0; \frac{\pi}{2}]$ функция не имеет и наибольшее значение функции $y = 12\cos x + 6\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}\pi + 6$ на отрезке $[0; \frac{\pi}{2}]$ достигается при $x = \frac{\pi}{3}$ $y_{\max}(x) = y(\frac{\pi}{3}) = 12$ Ответ: 12	
5. Самостоятельная работа учащихся	
1) Найдите производную функции	
а) $x^2 + 2x^3 - 5$ б) $6\sqrt{x}$ в) $2\sin x$	а) $2x^5 - 3x^3 - 12$ б) $2\sqrt{x}$ в) $15\cos x$
2) Найдите производную функции	
а) $\frac{x^6}{3} + \frac{2x^5}{5} - 12$ б) $4\cos(5x-1)$	а) $\frac{x^{12}}{4} - \frac{4x^6}{3} + 2$ б) $3\sin(4x-5)$
3) Найдите значения x , при которых значения производной функции отрицательны	
$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2$	$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 5$
4) Решите уравнение $f'(x) = 0$	
$f(x) = \frac{x}{2} + \cos x$	$f(x) = \frac{x}{2} - \sin x$
6. Проверка результатов самостоятельной работы	
Выполняя задания, ученики допустили ошибки. - Какие формулы производных ученик не знает, в каких правилах дифференцирования есть ошибки? В чём сложность производной сложной функции для ученика?	

	Обсудите самостоятельно. Обсудите в парах. Обсудите вместе (на обратной стороне доски). Работа в парах. Цель научиться применять умения преобразовывать выражения, содержащие производную сложной функции и некоторых элементарных функций. Старайтесь лаконично и обоснованно рассказать решение примеров ЕГЭ своему однокласснику. Ваша цель добиться, чтобы он знал ход ваших преобразований при решении производной функции. Выслушайте решение задачи своего одноклассника, пусть подробно расскажет алгоритм выполнения 12 задания ЕГЭ.
Подведение итогов	
Учитель:	Мы проделали большой путь – от основ школьной программы до написания решения заданий ЕГЭ. Производные – поистине удивительный инструмент, с помощью которого можно описывать и моделировать окружающий мир. Они лежат в основе множества технологий – от физики и экономики до нейросетей. Вернёмся к целям урока, которые себе поставили. Давайте отметим то, что у нас получилось из намеченного, что нового сегодня вы узнали уважаемый 10 класс. Вы активно работали на разных этапах занятия. Ответы ваши были сегодня достаточно аргументированы, оперировали понятиями, сочетая теоретические знания с практическими заданиями ЕГЭ, активно вносили поправки. Уважаемые ученики, вы сегодня показали свои крепкие знания в теме «Производная функции», а также свои навыки, умения вы сможете с лёгкостью применять в практических решениях. Особенно старатель работали (Ф. И. учеников). Запишите домашнее задание. Пока ученики записывают домашнее задание, учитель проговаривает оценки за урок, обосновывает каждую оценку.
Учитель:	Сегодня на уроке мы внесли очередной вклад в вашу подготовку к ЕГЭ, повторяя понятие производной функции; формулы некоторых элементарных функций; правила дифференцирования и алгоритм выполнения 12 задания ЕГЭ. Большинство из вас показали отличные результаты. Урок закончен.

Уважаемый десятый класс, спасибо за ваш труд, работу.
Спасибо за урок!

Самостоятельная работа

1 вариант

1) $f(x) = 3x^4 - 5x^2$

2) $f(x) = 3\cos x - \sin x$

3) $f(x) = \cos x + \frac{1}{\sin^2 x}$

4) $f(x) = \frac{1}{x} - 2e^x$

5) $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{3})$

6) $f(x) = (3x - 12)^4$

2 вариант

1) $f(x) = 4x^5 - 6x^3$

2) $f(x) = 5\cos x - 2\sin x$

3) $f(x) = \sin x + \frac{1}{\cos^2 x}$

4) $f(x) = 3e^x - \frac{1}{x}$

5) $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$

6) $f(x) = (4x - 11)^5$

Вариант 1

Найдите производную функции:

1. $y = x^3 - 2x^2 + x + 2;$

2. $y = \sqrt{x} (2 \sin x + 1);$

3. $y = \frac{1}{x^2};$

4. $y = \frac{1}{\cos x};$

5. $y = \frac{3x^2 - 2}{x^3};$

6. $y = \operatorname{tg} x + \frac{1}{x}.$

Самостоятельная работа

В-1	В-2
1. $(\sqrt{2})'$	1. $(x^3 - x + 3)'$
2. $(x^2 + x + 2)'$	2. $\left(\frac{1}{x}\right)'$
3. $(\sqrt{x})'$	3. $(5x^6)'$
4. $(4x^4)'$	4. $(x^4 - x^2)'$
5. $(4^3 + 2x)'$	5. $(15x + 9)'$
6. $(2 \cos 3x)'$	6. $((3x - 2)(4x + 5))'$
7. $(13x^2 - 3x)'$	7. $(\pi)'$
8. $(8x - 13)'$	8. $(\cos(6x - 5))'$
9. $((2x + 3)(3x - 5))'$	9. $(2 \operatorname{tg} x)'$
10. $(\sin(5x - \pi))'$	10. $\left(\sin \frac{x}{4}\right)'$

I вариант	II вариант
Найдите производные следующих функций:	Найдите производные следующих функций:
1. $(x^3 - 4)'$ =	1. $(x^3 + 1)'$ =
2. $\left(\frac{1}{x} + 2x\right)'$ =	2. $\left(-\frac{1}{x} - 3x\right)'$ =
3. $(5x^2 - \sqrt{x})'$ =	3. $(4x^4 + \sqrt{x})'$ =
4. $\left(\frac{1}{2}x^2 + 4\sqrt{x} - \frac{2}{x}\right)'$ =	4. $\left(\frac{1}{3}x^3 - 2\sqrt{x} + \frac{5}{x}\right)'$ =
5. $((3x + 7) \cdot (7x^3 + 5x - 4))'$ =	5. $((5x - 4) \cdot (2x^4 - 7x + 1))'$ =
6. $\left(\frac{4x^2 + 8}{5 - 2x^3}\right)'$ =	6. $\left(\frac{x^3 - 7}{3 - 4x^4}\right)'$ =

Вычисление производной по определению

21⁰. Используя схему вычисления производной, найдите производные следующих функций:

1) $y = 2x^2 + 3x$; 2) $y = 2x^3$; 3) $y = x^3 + x$; 4) $y = \frac{2}{x}$;

5) $y = \frac{1}{x^3}$; 6) $y = \frac{x}{x+1}$; 7) $y = \frac{x}{x+2}$; 8) $y = -\frac{1}{2x^2}$;

9) $y = \sqrt[3]{x}$; 10) $y = \sqrt{x+1}$; 11) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; 12) $y = \sqrt[3]{x^2}$.

810 Найти производную функции:

1) $(x^2 - x)(x^3 + x)$; 2) $(x+2)\sqrt[3]{x}$; 3) $(x-1)\sqrt{x}$.

814 Найти производную функции:

1) $\frac{x^5 + x^3 + x}{x+1}$; 2) $\frac{\sqrt{x} + x^2 + 1}{x-1}$.

815 Найти $f'(1)$, если:

1) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$; 2) $f(x) = \frac{2x^2}{1 - 7x}$.

Найти производную функции (818—821).

818 1) $\frac{x^3 + x^2 + 16}{x}$; 2) $\frac{x\sqrt[3]{x} + 3x + 18}{\sqrt[3]{x}}$.

819 1) $\frac{x^2 - 4}{\sqrt{x}}$; 2) $\left(\sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)\left(\sqrt[4]{x} - \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)$.

Тема «Производная и ее геометрический смысл»

1. Найти производную функции:

а) $2x^3 - \frac{1}{x^2}$ б) $(4 - 3x)^7$

в) $e^x \sin x$ г) $\frac{2-x}{\ln x}$

2. Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 , если $f(x) = 2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x_0 = \frac{1}{4}$ 3. Записать уравнение касательной к графику функции $f(x) = 4x - \cos x + 1$ в точке $x_0 = 0$ 4. Найти значения x , при которых значения производной функции $f(x) = \frac{1-x}{x^2+8}$ отрицательны.5. Найти точки графика функции $f(x) = x^3 + 3x^2$, в которых касательная к графику функции параллельна оси абсцисс.

Контрольная работа по теме «Производная функции»

1. Найдите $f'(x)$ и $f'(x_0)$, если:

а) $f(x) = -5x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 2x + 3$, $x_0 = 1$;

б) $f(x) = x \operatorname{tg} x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

2. Найдите $f'(x)$, если:

а) $f(x) = \frac{2x+3}{3x-2}$; б) $f(x) = 5\sqrt[5]{x^4}$; в) $f(x) = 10^x$; г) $f(x) = \sqrt{4x+3}$.

3. Вычислите значение производной функции $y = \cos 3x$ в точке $x_0 = -\frac{\pi}{6}$.4. Найдите все значения x , при каждом из которых производная функции $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 17$ равна нулю.5*. Найдите $f'(x)$, если:

а) $f(x) = \frac{6}{\sqrt[3]{x}} + 12\sqrt[3]{x^5}$; б) $f(x) = \lg(4 - 3x)$;

в) $f(x) = 4x\sqrt{3x^2 - 2x + 1}$.

6*. Точка движется по прямой. Зависимость ее координаты x от времени t задана формулой $x = 23 + 20t - 5t^2$. Найдите момент времени t , когда точка остановится.7*. Найдите производную функции $f(x) = \ln \sqrt{5 + \sin x}$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 6

(Правила и формулы отыскания производных)

Вариант 1

1. Найдите производную функции:

а) $y = x^5$; д) $y = 2\sqrt{x} + 3 \sin x$;

б) $y = 3$; е) $y = x \cos x$;

в) $y = \frac{4}{x}$; ж) $y = \frac{\lg x}{x}$;

г) $y = 3 - 2x$; з) $y = (3x + 5)^4$.

2. Найдите угол, который образует с положительным лучом оси абсцисс касательная к графику функции

$$y = \frac{x^{10}}{10} - \frac{x^7}{7} + x\sqrt{3} - 2 \text{ в точке } x_0 = 1.$$

3. Вычислите $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$, если

$$f(x) = 2 \sin x + 3x^2 - 2\pi x + 3.$$

4. Прямолинейное движение точки описывается законом $s = t^5 - t^2$ (м). Найдите ее скорость в момент времени $t = 2$ с.5. Найдите все значения x , при которых выполняется неравенство $f'(x) \leq 0$, если $f(x) = 12x - x^3$.6. Найдите все значения x , при которых выполняется равенство $f'(x) = 0$, если

$$f(x) = \cos 2x + x\sqrt{3} \text{ и } x \in [0; 4\pi].$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 7 (2 ч)

(Применение производной к исследованию функций)

Вариант 11. Дана функция $y = x^3 - 3x^2 + 4$. Найдите:

а) промежутки возрастания и убывания функции;

б) точки экстремума;

в) наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[-1; 4]$.

2. Постройте график функции

$$y = x^3 - 3x^2 + 4.$$

3. Составьте уравнение касательной к графику функции

$$y = 4\sqrt{x} \text{ в точке } x = 4.$$

4. Площадь прямоугольного участка 144 м². При каких размерах участка длина окружающего его забора будет наименьшей?

5. Постройте график функции

$$y = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}.$$