

Задачи на доказательство подобия треугольников в заданиях ОГЭ

Работу выполнила:
Кузнецова Таисия,
ученица 8А класса
МНБОУ «Лицей №76»
г. Новокузнецк

Руководитель:
Новолодская Светлана Владимировна,
учитель математики
МНБОУ «Лицей №76»

2025г.

Оглавление

Введение	3
Теория по теме «Подобие треугольников»	5
Практическая часть	
Задачи №24 ОГЭ на доказательство подобия треугольников (прототипы)...	8
Решение задач №24 ОГЭ.....	11
Заключение.....	15
Список литературы.....	16
Приложение №1 «Результаты анкетирования»	
Приложение №2 «Презентация сборника»	
Приложение №3 «Другие задачи №24 ОГЭ открытого банка»	

Введение

Задачи по геометрии на доказательство включены во вторую часть ОГЭ под номером 24. По статистике к их решению приступают не более 20% выпускников.

Поэтому задумалась, а могут ли ученики 8 классов справиться с этими задачами? Было проведено анкетирование одноклассников и ребят из параллельных классов. В опросе приняли участие 62 респондента (Приложение №1). Результаты анкетирования позволяют сделать вывод, что тема «Решение задач на доказательство при подготовке к ОГЭ» актуальна для всех ребят, ориентированных на высокий балл по математике на экзамене. Но как только приступила к работе, поняла, что прототипов задач: «Площадь», «Подобие», «Окружность» (Приложение №2), поэтому тему исследовательского проекта ограничила подобием треугольников, так как она одна из сложнейших и ключевых в геометрии 8 класса.

Гипотеза: среди прототипов задач №24 ОГЭ по математике есть задачи на доказательство подобия треугольников, которые может решить ученик 8 класса.

Объект исследования: прототипы заданий №24 ОГЭ по математике.

Предмет исследования: возможность решения заданий №24 ОГЭ на уровне понятийного аппарата ученика 8 класса.

Цель: научиться решать задачи на доказательство повышенной сложности.

Задачи:

1. познакомиться с прототипами задач, представленными в различных источниках;
2. разделить задачи на типы;
3. решить некоторые прототипы;
4. сделать электронный сборник задач с решениями.

Методы: поисковый, анализ, сравнение, синтез.

Этапы выполнения проекта	Сроки	Задачи
1. Организационный	октябрь	определение темы исследовательского проекта, целей и задач
2. Поисковый	ноябрь	- планирование проектной деятельности по этапам - сбор, изучение, обработка и анализ информации по теме проекта - классификация прототипов задач по типам
3. Технологический	декабрь	решение отобранных задач
4. Заключительный	январь	- оформление презентации проекта - создание сборника задач - анализ результатов, оценка возможности использования продукта в учебной деятельности

Предметная область: математика.

Тип проекта: исследовательский

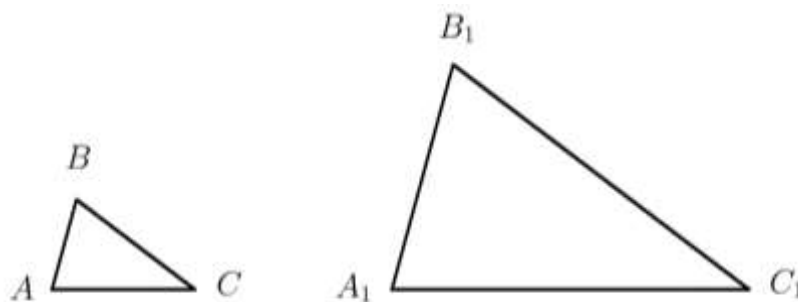
Форма продукта проектной деятельности: сборник задач №24 ОГЭ на доказательство подобия треугольников.

Практическая значимость – результаты работы можно использовать, для:

- знакомства учащихся с «условной» типологией и содержанием прототипов задач на доказательство подобия треугольников, встречающихся на ОГЭ;
- электронный сборник можно использовать на уроках, занятиях внеурочной деятельности при подготовке к экзамену в 8 классах.

Теория по теме «Подобие треугольников»

В первую очередь необходимо знать само определение подобных треугольников.



Определение: Два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого треугольника, т.е. если выполняется:

$$1. \quad \angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1 \quad (1)$$

$$2. \quad \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k \quad (2)$$

k – это отношение сходственных сторон подобных треугольников, называется коэффициентом подобия.

Сходственные стороны лежат напротив равных углов. Подобие треугольников можно установить, проверив только одно из неравенств (1) и (2).

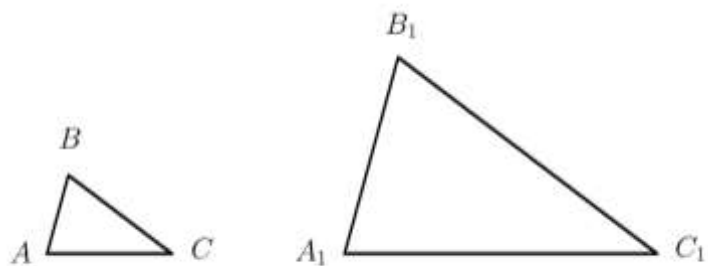
Отношение периметров подобных треугольников равно отношению соответствующих сторон и равно коэффициенту подобия.

$$\frac{P}{P_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = k$$

Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

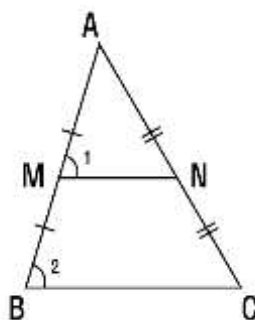
$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = \left(\frac{AB}{A_1B_1} \right)^2 = k^2$$

Признаки подобия треугольников:

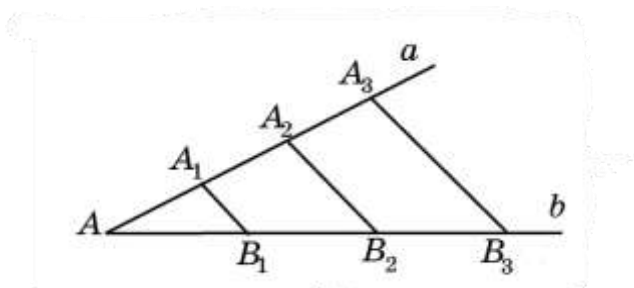


1. Если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (по двум равным углам)
2. Если $\angle A = \angle A_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (по двум пропорциональным сторонам и углу между ними)
3. Если $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (по трем пропорциональным сторонам)

Следует обратить внимание на такие случаи:



1. Если $MN \parallel BC$, то $\triangle AMN \sim \triangle ABC$ (Прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает треугольник, подобный данному)



2. Если $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, и $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$, то $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$ (теорема Фалеса), а значит получаются подобные треугольники.

3. Отношение высот подобных треугольников, проведенных к сходственным сторонам, равно коэффициенту подобия.
4. Отношение медиан подобных треугольников, проведенных к сходственным сторонам, равно коэффициенту подобия.
5. Отношение биссектрис подобных треугольников, проведенных к сходственным сторонам, равно коэффициенту подобия. [1]

Задачи №24 ОГЭ на доказательство подобия треугольников (прототипы)

Анализ задач открытого банка ФИПИ, сборников с типовыми вариантами И. В. Яценко и Прокофьева А.А. позволил сделать вывод, что представленные прототипы одинаковые по содержанию, а значит технологии решения. Была проведена «условная» классификация задач по типам.

№1 «Вписанный четырехугольник, касательные из одной точки. Подобие треугольников с общим углом»

- 1.1. Известно, что около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность и что продолжения сторон AB и CD четырехугольника пересекаются в точке S . Докажите, что треугольники SBC и SDA подобны [3].
- 1.2. Известно, что около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность и что продолжения сторон AD и BC четырехугольника пересекаются в точке K . Докажите, что треугольники KAB и KCD подобны [3].
- 1.3. Известно, что около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность и что продолжения сторон AB и CD четырехугольника пересекаются в точке M . Докажите, что треугольники MBC и MDA подобны. [5]

№2 «Подобие треугольников, одна из сторон которых общая»

- 2.1. Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 9 и 18, $BD = 36$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны [3].
- 2.2. Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 4,5 и 18, $BD = 9$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны [2].
- 2.3. Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 4 и 64, $BD=16$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны [5].

№3 «Подобие треугольников через подобие других»

- 3.1. В треугольнике ABC с тупым углом ACB проведены высоты AA_1 и BB_1 . Докажите, что треугольники A_1CB_1 и ACB подобны [3].
- 3.2. В треугольнике ABC с тупым углом ABC проведены высоты AA_1 и CC_1 . Докажите, что треугольники A_1BC_1 и ABC подобны [5].
- 3.3. В треугольнике ABC с тупым углом BAC проведены высоты BB_1 и CC_1 . Докажите, что треугольники AB_1C_1 и ABC подобны [2].

№4 «Окружности, внутренняя касательная»

- 4.1. Окружности с центрами в точках I и J не имеют общих точек, и ни одна из них не лежит внутри другой. Внутренняя общая касательная к этим окружностям делит отрезок, соединяющий их центры, в отношении $m : n$. Докажите, что диаметры этих окружностей относятся как $m : n$ [3].
- 4.2. Окружности с центрами в точках P и Q не имеют общих точек, и ни одна из них не лежит внутри другой. Внутренняя общая касательная к этим окружностям пересекает отрезок, соединяющий их центры, в точке A . Радиусы окружностей относятся как $a : b$. Докажите, что отрезки на которые касательная разделила отрезок между центрами относятся как $a : b$ [3].
- 4.3. Окружности с центрами в точках PP и QQ не имеют общих точек, и ни одна из них не лежит внутри другой. Внутренняя общая касательная к этим окружностям делит отрезок, соединяющий их центры, в отношении $a : b$. Докажите, что диаметры этих окружностей относятся как $a : b$. [5]

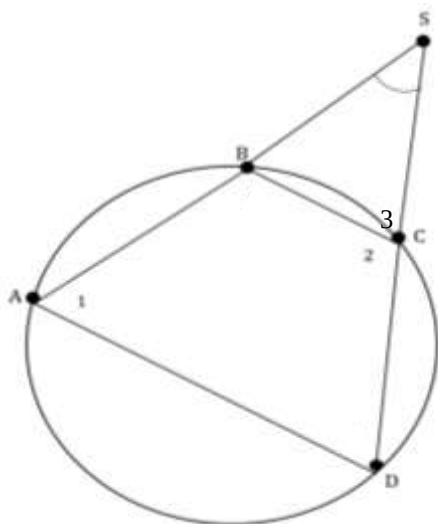
№5 «Разное»

- 5.1. В параллелограмме $ABCD$ проведены высоты BE и BF . Докажите, что $\triangle ABE \sim \triangle CBF$ [3].

5.2. В треугольнике ABC проведена высота BK и медианы AX и CZ . Докажите, что углы $\triangle ABC$ равны углам $\triangle KZX$.

Решение задач №24 ОГЭ

№1.1.



Дано: $ABSD$ – вписан в окружность

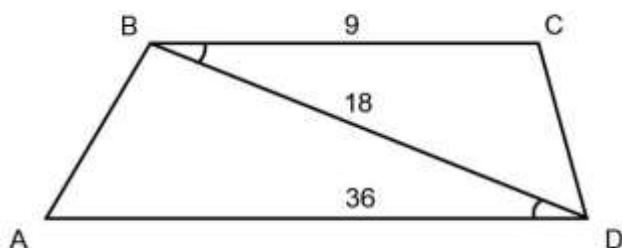
$AB \cap DC = S$

Доказать: $\triangle BSC \sim \triangle DAS$

Доказательство:

- 1) В треугольниках BSC и ASD $\angle S$ – общий.
- 2) т.к. $ABCD$ – четырехугольник, вписанный в окружность $\Rightarrow \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ (сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна 180°).
- 3) Пусть $\angle 1 = x \Rightarrow \angle 2 = 180 - x$.
- 4) Рассмотрим $\angle 2$ и $\angle 3$ (смежные) $\Rightarrow \angle 3 = 180 - \angle 2 = 180 - (180 - x) = 180 - 180 + x = x \Rightarrow \triangle BSC \sim \triangle DAS$ по I признаку (по двум углам).

№2.1.



Дано: $ABCD$ – трапеция

$BC = 9$; $BD = 18$; $AD = 36$

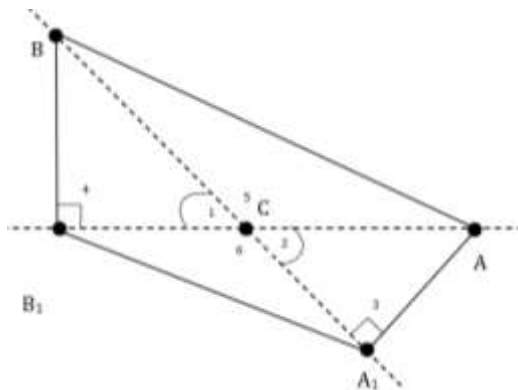
Доказать: $\triangle CBD \sim \triangle BDA$

Доказательство:

- 1) $\angle CBD = \angle ADB$ (накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей BD)

$\frac{\Delta BCD}{\Delta ABD} : \frac{BD}{AD} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} ; \frac{BC}{BD} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta CBD \sim \Delta BDA$ по 2 признаку.

№3.1.



Дано: ΔABC , $\angle ACB$ – тупой,

AA_1 и BB_1 – высоты.

Доказать: $\Delta A_1CB_1 \sim \Delta ACB$

Доказательство:

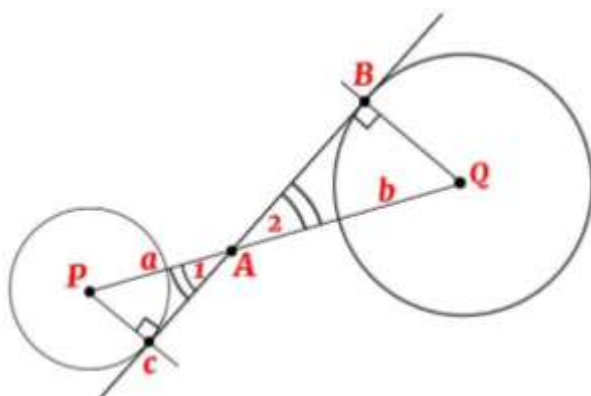
1) $\angle 1 = \angle 2$ (вертикальные углы), $\angle 3 = \angle 4 = 90^\circ$ (по построению) $\Rightarrow$

$$\Delta BB_1C \sim \Delta AA_1C \Rightarrow \frac{B_1C}{CA_1} = \frac{B_1B}{A_1A} = \frac{BC}{CA}$$

2) В треугольниках B_1CA_1 и BCA $\angle 5 = \angle 6$ (вертикальные углы) и стороны

$$\frac{B_1C}{CA_1} = \frac{BC}{CA} \text{ пропорциональный из 1 п. } \Rightarrow \Delta A_1CB_1 \sim \Delta ACB$$

№4.1.



Дано: $(O; PC)$ и $(O; QB)$

CB — внутренняя касательная

$$\frac{PA}{AQ} = \frac{a}{b}$$

$$\text{Доказать: } \frac{d_1}{d_2} = \frac{a}{b}$$

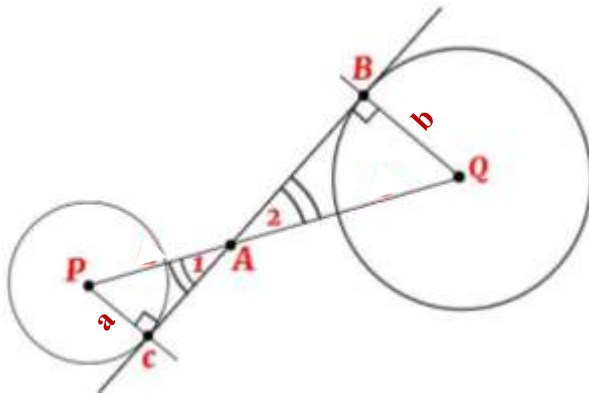
Доказательство:

1) $\angle C = \angle B = 90^\circ$ (по свойству радиуса проведенного в точку касания); $\angle 1 = \angle 2$ (вертикальные) $\Rightarrow \Delta PCA \sim \Delta ABQ$ по 2 углам $\Rightarrow$ можно составить

$$\text{отношения сходственных сторон: } \frac{PC}{BQ} = \frac{PA}{AQ} = \frac{CA}{AB} = \frac{a}{b}$$

2) $PC = r_1$; $BQ = r_2$. $\frac{r_1}{r_2} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{d_1}{d_2} = \frac{2r_1}{2r_2} = \frac{a}{b}$

№4.2.



Дано: $(O; PC)$ и $(O; QB)$

CB — внутренняя касательная

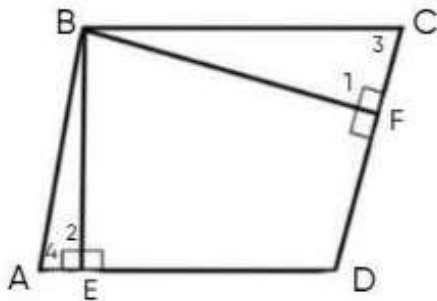
$$\frac{PC}{BQ} = \frac{a}{b}$$

Доказать: $\frac{PA}{AQ} = \frac{a}{b}$

Доказательство:

- $\angle C = \angle B = 90^\circ$ (по свойству радиуса проведенного в точку касания);
 $\angle 1 = \angle 2$ (вертикальные) $\Rightarrow \triangle PCA \sim \triangle ABQ$ по 2 углам $\Rightarrow$ можно составить отношения сходственных сторон: $\frac{PC}{BQ} = \frac{PA}{AQ} = \frac{CA}{AB} = \frac{a}{b}$

5.1.



Дано: ABCD — параллелограмм

BE и CF высоты

Доказать: $\triangle ABE \sim \triangle CBF$

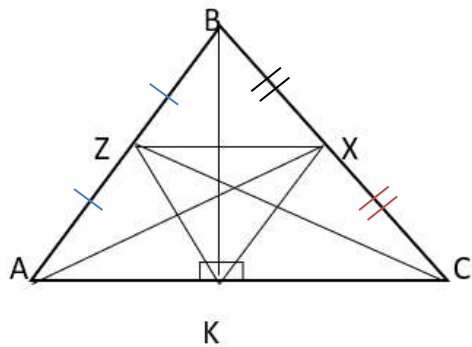
Доказательство:

- $\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ$ (по условию), $\angle 3 = \angle 4$ (в параллелограмме углы лежащие напротив равны) $\Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle CBF$ (по двум углам).

5.2.

Дано: $\triangle ABC$, BK-высота; AX и CZ-медианы.

Доказать: углы $\triangle ABC$ равны углам $\triangle KZX$



Доказательство:

ZX - средняя линия (т.к. соединяет середины сторон) $\Rightarrow ZX = \frac{1}{2} AC$, KX - медиана прямоугольного (равна половине гипотенузы) $\triangle BKC \Rightarrow KX = \frac{1}{2} BC$, KZ - медиана прямоугольного $\triangle BKA \Rightarrow KZ = \frac{1}{2} BA \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle KZX$ по 3 признаку подобия $\Rightarrow$ в треугольниках углы напротив сходственных сторон равны.

Заключение

В своей работе я рассмотрела задачи на доказательство подобия треугольников, встречающиеся в заданиях ОГЭ. Все задачи, которые ставила, выполнила. Гипотеза о том, что среди прототипов задач №24 в ОГЭ есть задачи, которые может решить ученик 8 класса подтвердилась. Основные выводы:

- 1) при решении задач на доказательство подобия треугольников №24 ОГЭ достаточно знать основные определения и теоремы, изучаемые на уроках геометрии в 8 классе;
- 2) электронный сборник задач на доказательство можно использовать на уроках, занятиях внеурочной деятельности при подготовке к ОГЭ 8 классах;
- 3) задачи, представленные в приложении №2 станут основой для работы над следующим проектом «Задачи на доказательство по теме «Площадь». ОГЭ».

Никакая задача не будет трудной если знать теоретический материал и практиковать применять его при решении задач разного типа. А подготовку к итоговой аттестации необходимо начинать как можно раньше.

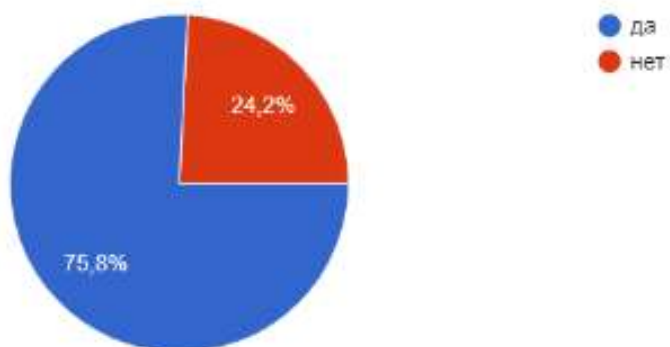
Список литературы

1. Математика. Геометрия: 7-9 классы: базовый уровень: М34 учебник/ Л.С. Атаносян, В. Ф. Бутузов [и др.]. – 14 изд., перераб. – Москва: Просвещение, 2023. – 416 с.
2. Математика. Основной государственный экзамен. Готовимся к итоговой аттестации / А. А. Прокофьев, Е. А. Разинкова. — Эл. изд. — 1 файл pdf : 282 с. — Москва : Издательство «Интеллект-Центр», 2024.
3. ОГЭ. Математика: типовые экзаменационные варианты: 36 / под ред. И. В. Ященко. — Москва: Издательство «Национальное образование», 2025. — 224 с.
4. Сдам ГИА: Решу ОГЭ - образовательный портал для подготовки к экзаменам. Математика [Электронный ресурс]. — Режим доступа: https://math-oge.sdamgia.ru/test?filter=all&category_id=77, свободный. - Загл. с экрана.
5. Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки: <https://oge.fipi.ru/>

Приложение №1 "Результаты анкетирования"

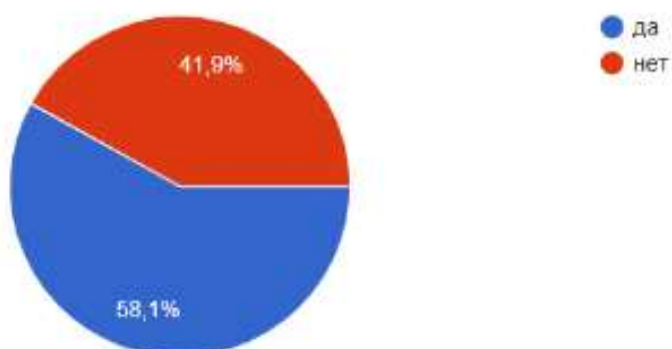
Знаете ли вы, что ученик 8 класса может решить некоторые задачи на доказательство №24 ОГЭ?

62 ответа



Приходилось ли вам решать задачи на доказательство по геометрии из ОГЭ 2 части?

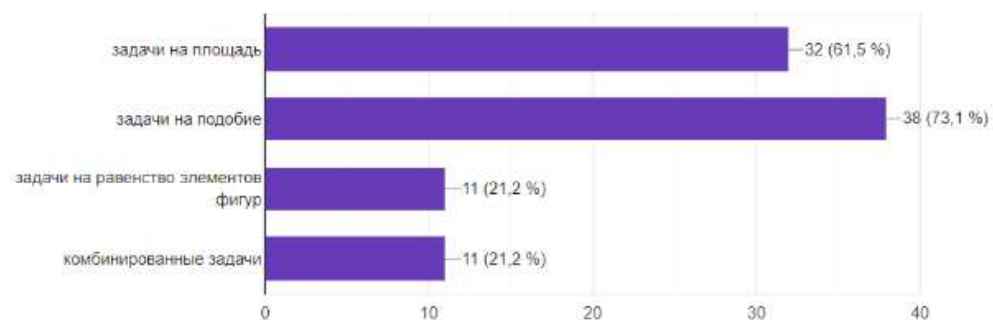
62 ответа



Если такие задачи приходилось решать, какие это были прототипы?

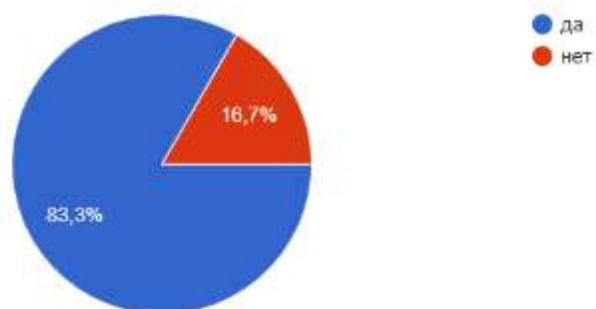
 Копировать диаграмму

52 ответа



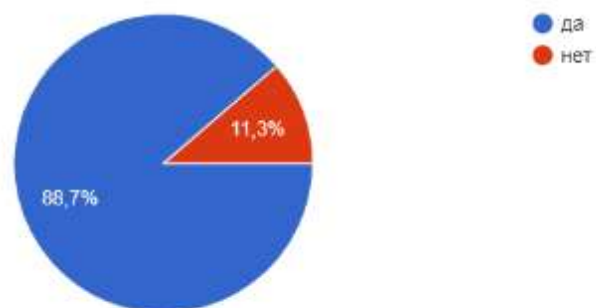
Если такие задачи приходилось решать были ли у вас затруднения?

60 ответов



Хотели бы познакомиться с такими задачами и научиться их решать?

62 ответа



Приложение №2 «Презентация сборника»

Электронный сборник сделан в текстовом редакторе Word. В документе выстроена удобная навигация через систему гиперссылок, позволяющая переходить в один из 4 разделов и возвращаться обратно.

Оглавление

Теория по теме «Подобие треугольников»	3
Задачи №24 ОГЭ на доказательство подобия треугольников (прототипы открытого банка)	6
Решение задач №24 ОГЭ	8
Другие задачи №24 ОГЭ открытого банка. «Площадь».....	11

Задачи №24 ОГЭ на доказательство подобия треугольников (прототипы) [\(оглавление\)](#)

№1 «Вписанный четырехугольник, касательные из одной точки.

Подобие треугольников с общим углом»

- 1.1. Известно, что около четырехугольника ABCD можно описать окружность и что продолжения сторон AD и BC четырехугольника пересекаются в точке K. Докажите, что треугольники SBC и SDA подобны. [\(решение\)](#)

- 1.2. Известно, что около четырехугольника ABCD можно описать окружность и что продолжения сторон AD и BC четырехугольника пересекаются в точке K. Докажите, что треугольники KAB и KCD подобны.

№2 «Подобие треугольников, одна из сторон которых общая»

- 2.1. Основания BC и AD трапеции ABCD равны соответственно 9 и 18, BD = 36. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны. [\(решение\)](#)
- 2.2. Основания BC и AD трапеции ABCD равны соответственно 4,5 и 18,

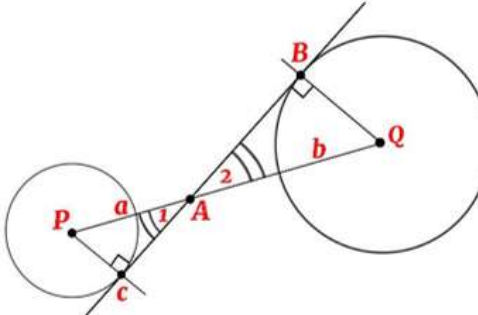
Во втором разделе есть возможность обратиться к решению конкретной задачи и затем вернуться к содержанию задач или в оглавление сборника.

$$\frac{B_1C}{CA_1} = \frac{BC}{CA} \text{ пропорция}$$

[file:///d:/2024-2025
год\тася\сборник.docx#оглавл](file:///d:/2024-2025%20год%20тася%20сборник.docx#оглавл)
 Нажмите CTRL и щелкните ссылку

$\sim \triangle AСВ$

№4.1. [\(к задачам\)](#) [\(оглавление\)](#)



Дано: (O; PC) и (O; QB)

CB — внутренняя касательная

$$\frac{PA}{AG} = \frac{a}{b}$$

Доказать: $\frac{d_1}{d_2} = \frac{a}{b}$

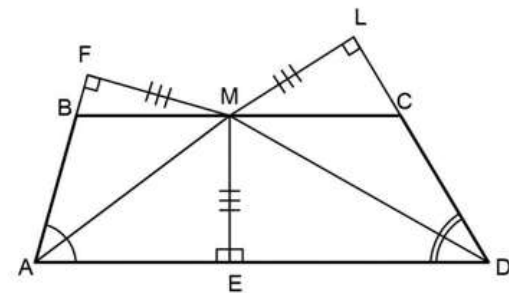
Доказательство:

1) $\angle C = \angle B = 90^\circ$ (по свойству радиуса проведенного в точку касания); $\angle 1 = \angle 2$ (вертикальные) $\Rightarrow \triangle PCA \sim \triangle ABQ$ по 2 углам $\Rightarrow$ можно составить отношения сходственных сторон: $\frac{PC}{BQ} = \frac{PA}{AQ} = \frac{CA}{AB} = \frac{a}{b}$

В разделе другие задачи №24 представлено несколько задач не связанных с подобием треугольников. В будущем данные задачи пополнят сборник задач на доказательство новым разделом «Площадь».

Другие задачи №24 ОГЭ открытого банка
[\(оглавление\)](#)

1) Биссектрисы углов A и D трапеции ABCD пересекаются в точке M, лежащей на стороне BC. Докажите, что точка M равноудалена от прямых AB, AD и CD [\(к задачам\)](#)



Дано: ABCD – трапеция

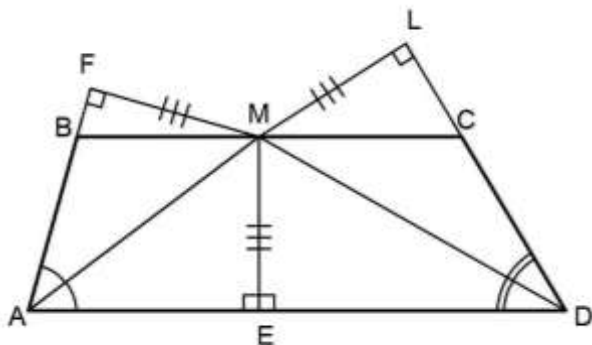
AM и DM – бис.

Доказать: (.) M равноудалена от прямых AB; AD; CD

Приложение №3

Другие задачи №24 ОГЭ открытого банка

- 1) Биссектрисы углов A и D трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M , лежащей на стороне BC . Докажите, что точка M равноудалена от прямых AB , AD и CD



Дано: $ABCD$ – трапеция

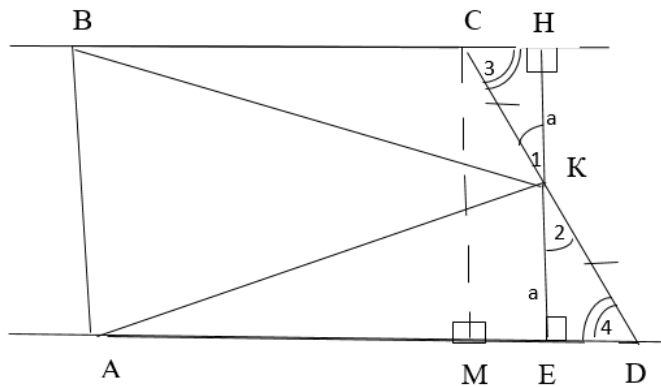
AM и DM – бис.

Доказать: $(.)$ M равноудалена от
прямых AB ; AD ; CD

Доказательство:

- 1) Расстояние от точки до прямой — это длина $\perp$ -ра, опущенного из точки на прямую содержащую противоположную сторону.
- 2) Расстояние от $(.)M$ до прямой AB это $\perp$ -р MF . Расстояние от $(.)M$ до AD это $\perp$ -р ME . Расстояние от $(.)M$ до CD это $\perp$ -р ML . Докажем, что $ME = MF = ML$
- 3) $\triangle FMA = \triangle AME$ (по гипотенузе и острому углу) $\Rightarrow MF = ME$
- 4) $\triangle LMD = \triangle MDE$ (по гипотенузе и острому углу) $\Rightarrow ML = ME$
- 5) $MF = ME = ML$.

2) Точка K — середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$. Докажите, что площадь треугольника KAB равна половине площади трапеции.



Дано: $ABCD$ - трапеция,

$CK = KD$.

Доказать: $S_{KAB} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$

Доказательство:

1) ДП: опустим высоту в треугольнике BKC - KN . Опустим высоту в треугольнике AKD - KE . $KN = KE$ из равенства треугольников CKN и EKD (по 2 признаку: $CK = KD$ - по условию, $\angle 1 = \angle 2$ - вертикальные, $\angle 3 = \angle 4$ - накрест лежащие при параллельных BC и AD и секущей CD) $\Rightarrow KN = KE = a$.

2) Высота трапеции $CM = NE = 2a$ (как расстояния м/д параллельными прямыми)

$$3) S_{\text{трап.}ABCD} = \frac{1}{2} \left(\frac{BC+AD}{1} \right) * \frac{2a}{1} = \frac{(BC+AD)*2a}{2} = (BC+AD)a$$

$$4) S_{\triangle BKC} = \frac{1}{2} BC * a; S_{\triangle AKD} = \frac{1}{2} AD * a \Rightarrow S_{\triangle BKC} + S_{\triangle AKD} = \frac{1}{2} * a + \frac{1}{2} AD * a = \frac{1}{2} (BC+AD)a$$

$$5) S_{\triangle KAB} = S_{ABCD} - (S_{\triangle BKC} + S_{\triangle AKD}) = (BC+AD)*a - \frac{1}{2} (BC+AD)a = (BC+AD)*(a - \frac{1}{2}a) = (BC+AD)*\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a(BC+AD) \Rightarrow S_{\triangle KAB} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$