

**Решения квадратных уравнений с помощью
окружности Карлейля.**

Исторический аспект и современная интерпретация.

При рассмотрении данной темы стоит сделать акцент на том, что графический способ нахождения корней квадратного уравнения с помощью параболы не всегда удобен. Кроме того, достаточно невелика точность нахождения корней данным способом. Поэтому данная тема заинтересовала шотландского математика и физика Джона Лесли, который предложил альтернативный способ решения квадратных уравнений, описав его в книге «Элементы геометрии и плоской тригонометрии», изданной в 1809 году. В книге (в одном из последующих ее изданий) Лесли ссылается на своего ученика Томаса Карлейля, предложившего способ решения приведенного квадратного уравнения с помощью построения окружности на координатной плоскости. Впоследствии окружность, построенная на координатной плоскости, для нахождения корней квадратного уравнения получила название Карлайл круг. Идея доказательства возникла у Карлейля при решении задачи Лесли, рисунок к которой заимствован из книги Лесли (Рисунок 1). Задача была сформулирована следующим образом: «Построить прямоугольник, равновеликий данному прямоугольнику $CDFE$, полупериметр которого равен данному отрезку BC ». Решение, предложенное Карлейлем, показано на рисунке 1.

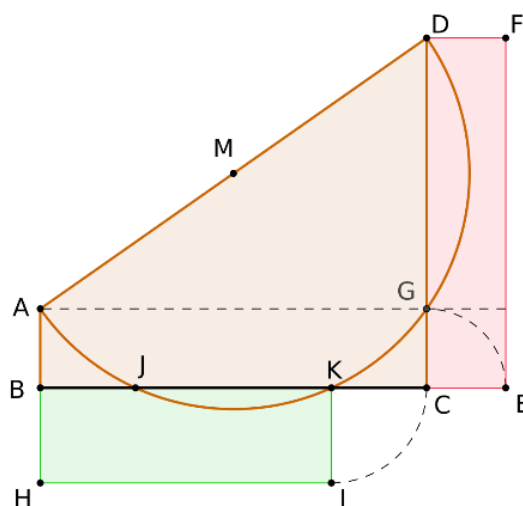


Рисунок 1 – Задача Лесли

Для доказательства рассмотрим рисунок, предложенный в задаче, в системе координат, где точка С будет являться началом координат. Предположим, что $CE=e$, $CB=AG=b$, $CD=d$. $CG=CE$ по построению. Тогда точка А будет иметь координаты $(b;e)$, точка В будет иметь координаты $(b;0)$, $D(0;d)$, $G(0;d-e)$; $M(\frac{b}{2}; \frac{d+e}{2})$ (рисунок 2).

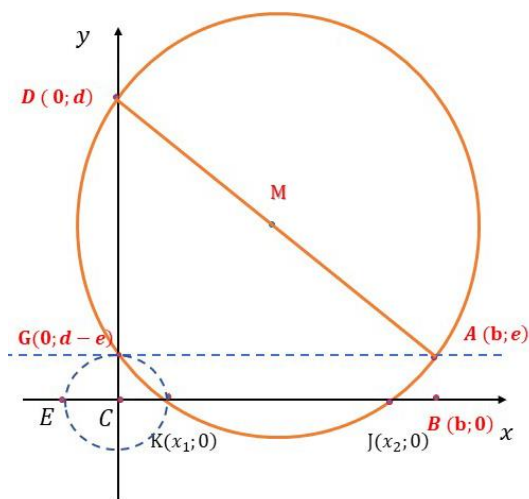


Рисунок 2 – Нахождение координаты центра окружности

Радиус окружности $MD=MA=MG$. Из прямоугольного треугольника AGD найдем медиану $GM=\frac{1}{2}AD$. По теореме Пифагора $AD^2 = AG^2 + GD^2$, тогда $AD^2 = b^2 + (d - e)^2$, следовательно $MG^2 = \frac{b^2 + (d - e)^2}{4}$.

Составим уравнение окружности:

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{d + e}{2}\right)^2 &= \frac{b^2 + (d - e)^2}{4} \\ (2x - b)^2 + (2y - (d + e))^2 &= b^2 + (d - e)^2 \\ 4x^2 - 4bx + b^2 + 4y^2 - 4(d + e)y + (d + e)^2 &= b^2 + (d - e)^2 \\ 4x^2 - 4bx + 4y^2 - 4(d + e)y + (d + e)^2 &= (d - e)^2 \\ 4x^2 - 4bx + 4y^2 - 4(d + e)y + d^2 + 2de + e^2 &= d^2 - 2de + e^2 \\ 4x^2 - 4bx + 4y^2 - 4(d + e)y + 4de &= 0 \\ x^2 - bx + y^2 - (d + e)y + de &= 0 \end{aligned}$$

Так как в точках пересечения окружности с осью x $K(x_1; 0)$ и $J(x_2; 0)$, $y=0$, то получим уравнение

$$x^2 - bx + de = 0, \text{ являющееся квадратным.}$$

$$\text{Тогда, по теореме Виета получим} \begin{cases} x_1 + x_2 = b \\ x_1 \cdot x_2 = de \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 = CK + CJ = b = CB, \text{ а } x_1 \cdot x_2 = CK \cdot CJ = de$$

Таким образом, можно сделать вывод, что $S_{CDFE} = S_{BKIH}$.

Стоит отметить, что идея использование окружности Карлейля для нахождения корней квадратного уравнения возникла не сразу. Австрийский инженер, Эдуард Лиль в 1867 году описал способ приближенного графического нахождения корней многочленов произвольной степени, а затем, в 1925 году американский ученый Джорж Миллер объяснил связь между применением окружности Карлейля к методу Лилия для нахождения корней квадратного уравнения.

Способ нахождения корней квадратного уравнения с помощью окружности Карлейля:

Пусть дано приведенное квадратное уравнение $x^2 - sx + p = 0$.

Построим на координатной плоскости (рисунок 3) точки $A(0; 1)$ и $D(s; p)$. Найдем координату середины отрезка AD , точки L , получим $L\left(\frac{s}{2}; \frac{p+1}{2}\right)$. Данная точка будет являться центром окружности радиуса $LA=LD$. Построим окружность с центром в точке L радиуса LA . Абсциссы точек пересечения окружности с осью x будут являться корнями исходного квадратного уравнения: $x^2 - sx + p = 0$.

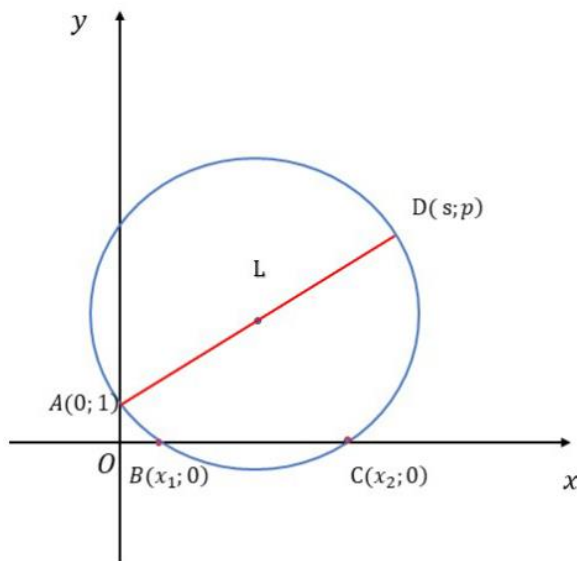


Рисунок 3 – Нахождение корней квадратного уравнения с помощью окружности Карлейля

Кроме того, вместо точки $D(s; p)$ можно взять ее проекции на координатные оси, а именно $D_1(s; 0)$ и $D_2(0; p)$. Далее необходимо построить серединные перпендикуляры к отрезкам OD_1 и AD_2 . Точка пересечения серединных перпендикуляров и будет являться центром окружности радиуса $LA=LD_1=LD_2$. Абсциссы точек пересечения окружности с осью x также и будут являться корнями исходного квадратного уравнения $x^2 - sx + p = 0$ (рисунок 4).

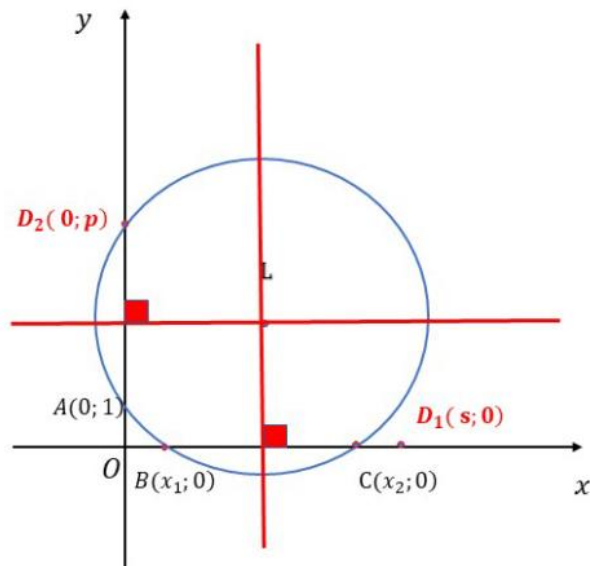


Рисунок 4 – Нахождение корней квадратного уравнения с помощью окружности Карлейля (второй способ)

Занятие по теме «Геометрическая алгебра и решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки».

С помощью циркуля и линейки найдем корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ (2), где $a \neq 0$

a, b, c – действительные числа

Необходимо построить окружность на координатной плоскости xOy , проходящую через точку $A(0; 1)$ и пересекающую ось x в точках $B(x_1; 0)$ и $C(x_2; 0)$, координаты которых по оси x и будут являться корнями квадратного уравнения (2) (рисунок 5).

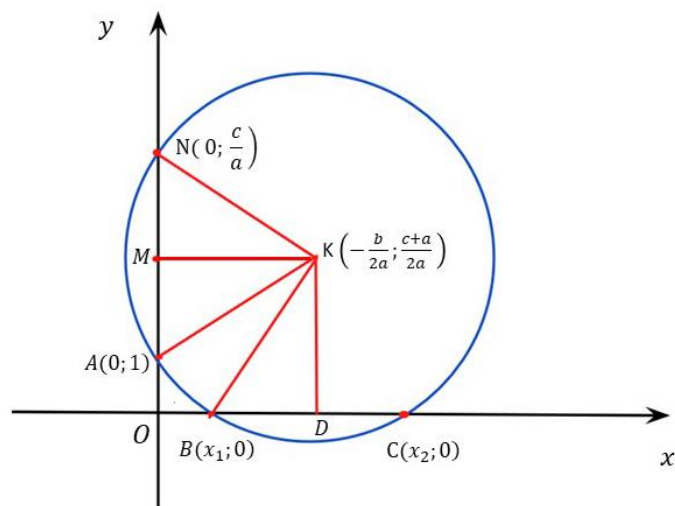


Рисунок 5 – Нахождение корней квадратного уравнения с помощью окружности с центром в точке с координатами $(-\frac{b}{2a}; \frac{c+a}{2a})$

По теореме о секущих получим $OC \cdot OB = ON \cdot OA$, но, зная, что $|OC| = x_2$, $|OB| = x_1$, а $|OA| = 1$, следовательно $ON = \frac{OC \cdot OB}{OA}$, тогда $ON = \frac{x_2 \cdot x_1}{1}$, зная, что по теореме Виета корни квадратного уравнения можно найти по формуле $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$, получим

$$ON = \frac{c/a}{1} = \frac{c}{a}, \text{ поэтому точка } N \text{ будет иметь координату } (0; \frac{c}{a}).$$

Для того, чтобы найти координаты центра окружности, точки К, найдем координаты середины отрезка AN, точки М и координаты середины отрезка ВС, точки D.

Найдем координаты точки М(x;y). Так как $N(0; \frac{c}{a})$, а $A(0; 1)$ то

$$x = \frac{0+0}{2} = 0; \quad y = \frac{\frac{c}{a}+1}{2} = \frac{c+a}{2a}, \text{ следовательно точка } M \text{ имеет координаты } (0; \frac{c+a}{2a}).$$

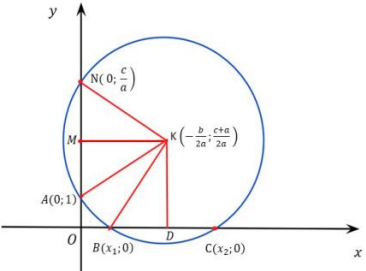
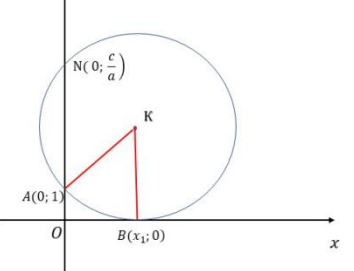
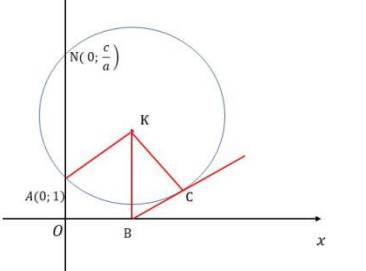
Рассуждая аналогично, получим т. D $(\frac{x_1+x_2}{2}; 0)$.

Согласно теореме Виета, проведем замену, получим $\frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$, тогда точка К, являющаяся точкой пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам АН и ВС и одновременно являющаяся центром окружности, будет иметь координаты $(-\frac{b}{2a}; \frac{c+a}{2a})$.

Тогда, для нахождения корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ необходимо построить на координатной плоскости окружность с центром в точке К с координатами $(-\frac{b}{2a}; \frac{c+a}{2a})$ радиуса КА.

Далее стоит рассмотреть три случая, в которых показывается зависимость корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ от радиуса окружности с центром в точке с координатами $(-\frac{b}{2a}; \frac{c+a}{2a})$ (таблица 9).

Таблица 9 - Сравнительная характеристика зависимости количества корней квадратного уравнения от радиуса окружности

I случай	II случай	III случай
Радиус окружности больше ординаты центра	Радиус окружности равен ординате центра, окружность касается оси Ох в точке В(x_1 ; 0)	Радиус окружности меньше ординаты центра, окружность не имеет общих точек с осью Ох
		
(Решение приведено выше)	В данном случае уравнение имеет два равных корня – это абсциссы точки касания окружности с осью Ох $x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$.	Уравнение не имеет корней в действительных числах.

Задача. Найти корни квадратных уравнений по формуле корней; графическим методом и с помощью циркуля и линейки.

Решение (таблица 10).

Таблица 10 – Нахождение корней квадратных уравнений с помощью дополнительных средств измерений и построений

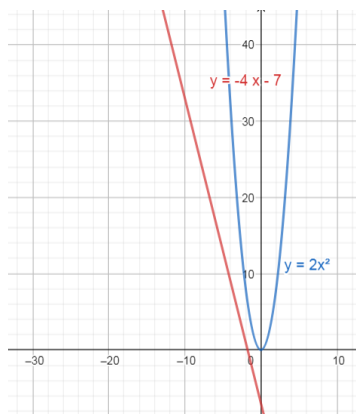
I. Нахождение корней через дискриминант:

$$D = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = -40$$

Ответ: корней нет, т.к.
 $D < 0$

II. Решение традиционным графическим способом

$$2x^2 + 4x + 7 = 0$$

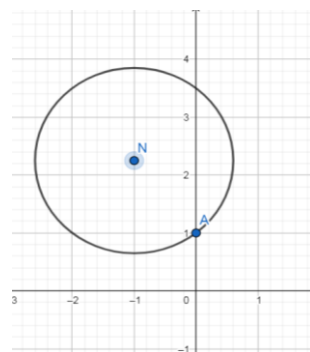


$$y = 2x^2$$

$$y = -4x - 7$$

Ответ: корней нет,
так как парабола и прямая
не пересекаются.
 $x^2 - 1,3x + 2 = 0$

III. Решение с помощью циркуля и линейки

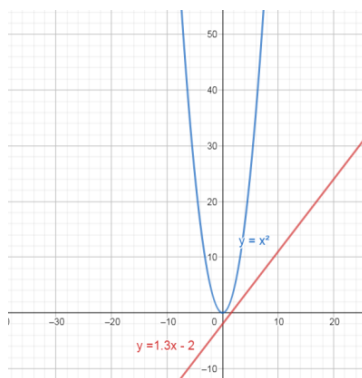


$$N\left(-\frac{4}{2 \cdot 2}; \frac{7+2}{2 \cdot 2}\right) \Rightarrow N(-1; 2,25) \text{ и } A(0;1)$$

Ответ: корней нет,
т.к. нет общих точек
пересечения окружности с
осью X.

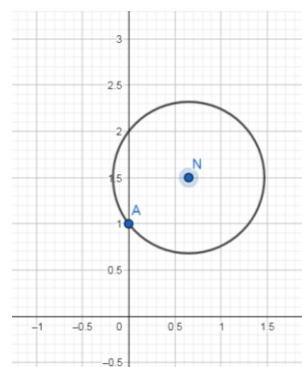
$$D = 1,3^2 - 4 \cdot 2 = -6,31$$

Ответ: корней нет,
т.к. $D < 0$



$$y = x^2 \text{ и } y = 1,3x - 2$$

Ответ: корней нет,
так как парабола и прямая
не пересекаются



$$N\left(-\frac{1,3}{2}; \frac{1+2}{2}\right) \Rightarrow N(-0,65; 1,5) \text{ и } A(0;1)$$

Ответ: корней нет,
т.к. нет общих точек
пересечения окружности с
осью X.

Продолжение таблицы 10

I. Нахождение корней через дискриминант:

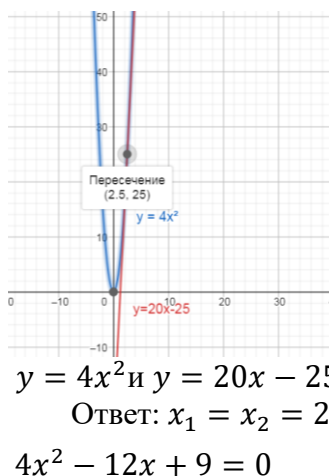
$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{-20 - \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 25}}{2 \cdot 4} \\
 &= 2,5 \\
 x_2 &= \frac{-20 + \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 25}}{2 \cdot 4} \\
 &= 2,5 \\
 \text{Ответ: } x_1 &= x_2 = 2,5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{-12 - \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4} \\
 &= 1,5 \\
 x_2 &= \frac{-12 + \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4} \\
 &= 1,5 \\
 \text{Ответ: } x_1 &= x_2 = 1,5
 \end{aligned}$$

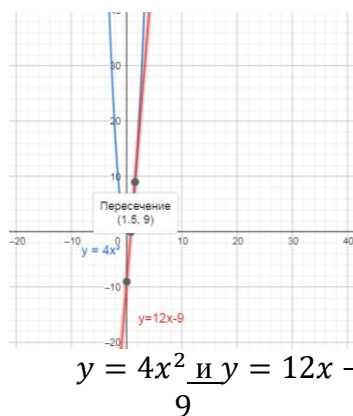
$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{-10 - \sqrt{10^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12}}{2 \cdot 2} = \frac{-10 - \sqrt{4}}{4} = \frac{-10 - 2}{4} = \frac{-12}{4} = -3 \\
 x_2 &= \frac{-10 + \sqrt{10^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12}}{2 \cdot 2} = \frac{-10 + \sqrt{4}}{4} = \frac{-8}{4} = -2 \\
 \text{Ответ: } x_1 &= -3; x_2 = -2.
 \end{aligned}$$

II. Решение традиционным графическим способом

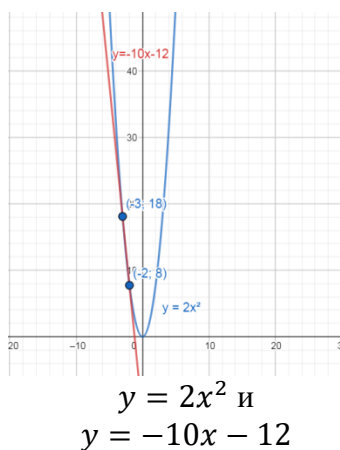
$$4x^2 - 20x + 25 = 0$$



$$4x^2 - 12x + 9 = 0$$

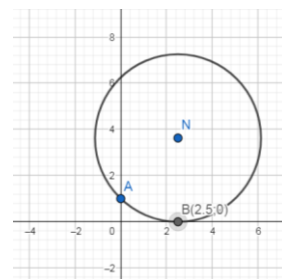


$$2x^2 + 10x + 12 = 0$$

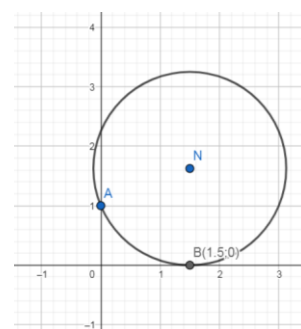


Ответ: $x_1 = -3; x_2 = -2$

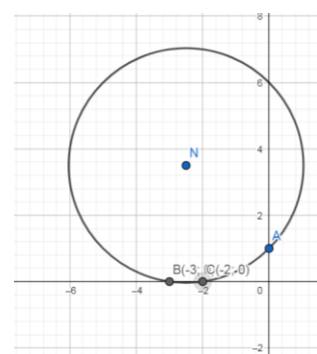
III. Решение с помощью циркуля и линейки



$$\begin{aligned}
 N\left(-\frac{20}{8}; \frac{25+4}{8}\right) &=> N(2,5; 3,625) \text{ и } A(0;1) \\
 \text{Ответ: } x_1 &= x_2 = 2,5
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 N\left(-\frac{12}{8}; \frac{9+4}{8}\right) &=> N(1,5; 1,625) \text{ и } A(0;1) \\
 \text{Ответ: } x_1 &= x_2 = 1,5
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 N\left(-\frac{10}{4}; \frac{12+2}{4}\right) &=> N(-2,5; 3,5) \text{ и } A(0;1). \\
 \text{Ответ: } x_1 &= -3; x_2 = -2
 \end{aligned}$$