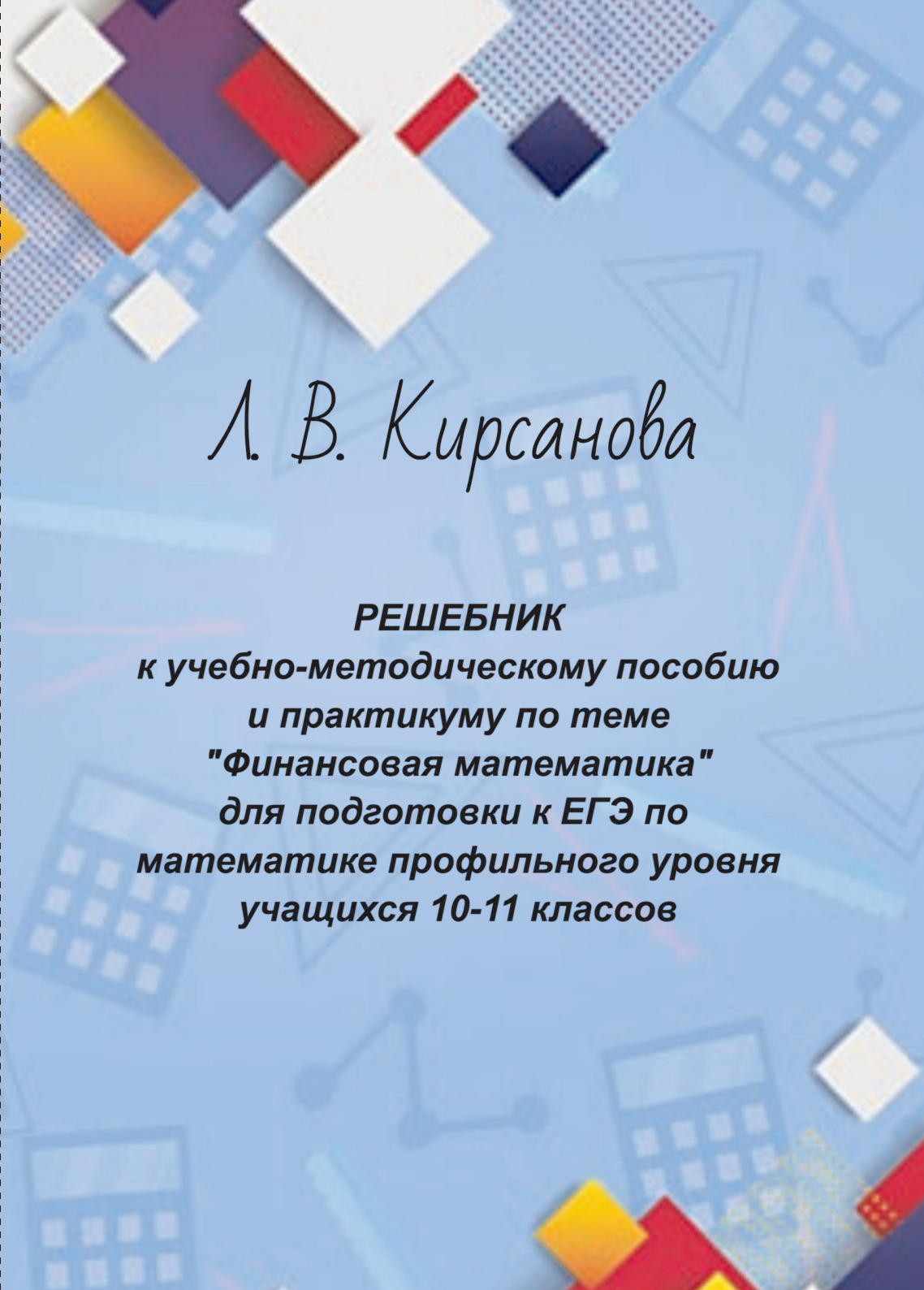




Л. В. Курсанова

РЕШЕБНИК
к учебно-методическому пособию
и практикуму по теме
"Финансовая математика"
для подготовки к ЕГЭ по
математике профильного уровня
учащихся 10-11 классов



Л. В. Кирсанова

РЕШЕБНИК
к учебно-методическому пособию и
практикуму по теме «Финансовая
математика» для подготовки к ЕГЭ по
математике профильного уровня учащихся
10-11 классов



Издательство Эдитус
Москва

УДК 512(075.3)
ББК 22.14я721
К43

Кирсанова Л. В.

**К43 Решебник к учебно-методическому пособию и практикуму по теме
«Финансовая математика» для подготовки к ЕГЭ по математике
профильного уровня учащихся 10–11 классов. — М.: Эдитус, 2024. — 76 с.**

ISBN 978-5-00217-346-4

Решебник предназначен для самопроверки учащимися решения задач по теме «Финансовая математика» из ЕГЭ по математике профильного уровня, которые представлены в учебно-методическом пособии и практикуме автора. Может использоваться как самостоятельная книга для изучения решений рассматриваемого типа задач. Решебник не содержит задачи для самостоятельной работы и теоретический материал, включены только условия и подробные объяснения по решению.

УДК 512(075.3)
ББК 22.14я721

Содержание

Введение	4
Равные платежи	5
Разные платежи	15
Равномерно уменьшающиеся платежи	27
Вклады	54
Задачи на оптимальный выбор	55

Введение

Решебник предназначен для самопроверки решения заданий из ЕГЭ по математике профильного уровня по теме «Финансовая математика», которые включены в учебно-методическое пособие и практикум автора.

Решения задач расположены в том же порядке, что и в учебно-методическом пособии, практикуме.

Главы обозначены аналогично.

В практикуме указаны страницы к каждой задаче на решение из данного решебника.

Решебник может быть использован, как самостоятельная книга. Здесь вы найдете решения большинства задач для подготовки к ЕГЭ по математике профильного уровня по теме «Финансовая математика» из ФИПИ и др. источников.

Решебник не содержит задач для самостоятельной работы. Ко всем задачам представлено обоснованное, подробное решение.

С большим количеством задач и теоретическим материалом можно ознакомиться в учебно-методическом пособии автора.

Потренироваться решать самостоятельно задачи по теме «Финансовая математика» можно в практикуме автора.

Равные платежи

1. 31 декабря 2014 года Михаил взял в банке некоторую сумму в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Михаил переводит в банк 2928200 рублей. Какую сумму взял Василий в банке, если он выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

Дано:

S – сумма кредита

$$p = 10\% = \frac{1}{10}$$

$n = 4$ года

$$c_1 = c_2 = 2928200 \text{ руб.} = x$$

Решение:

I. Строим модель

$$1) S + \frac{1}{10}S = \frac{11}{10}S - \text{долг перед 1-ым платежом}$$

$$\frac{11}{10}S - x - \text{долг после 1-го платежа}$$

$$2) \left(\frac{11}{10}S - x\right) + \frac{1}{10}\left(\frac{11}{10}S - x\right) = \frac{11}{10}\left(\frac{11}{10}S - x\right) =$$

$$S - ?$$

$$= \left(\frac{11}{10}\right)^2 S - \frac{11}{10}x - \text{долг перед 2-ым платежом}$$

$$\left(\frac{11}{10}\right)^2 S - \frac{11}{10}x - x - \text{долг после 2-го платежа}$$

...

$$4) \left(\frac{11}{10}\right)^4 S - \left(\frac{11}{10}\right)^3 x - \left(\frac{11}{10}\right)^2 x - \frac{11}{10}x - \text{долг перед 4-ым платежом}$$

$$\left(\frac{11}{10}\right)^4 S - \left(\frac{11}{10}\right)^3 x - \left(\frac{11}{10}\right)^2 x - \frac{11}{10}x - x = 0 - \text{долг после 4-го платежа}$$

II. Вычисления

$$\left(\frac{11}{10}\right)^4 S - \left(\frac{11}{10}\right)^3 x - \left(\frac{11}{10}\right)^2 x - \frac{11}{10}x - x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{11}{10}\right)^4 S - x \left(\left(\frac{11}{10}\right)^3 + \left(\frac{11}{10}\right)^2 + \frac{11}{10} + 1 \right) = 0$$

$$1, \frac{11}{10}, \left(\frac{11}{10}\right)^2, \left(\frac{11}{10}\right)^3 - \text{геометрическая прогрессия, } q = \frac{11}{10}$$

$$1 + \frac{11}{10} + \left(\frac{11}{10}\right)^2 + \left(\frac{11}{10}\right)^3 = \frac{1 \cdot \left(\left(\frac{11}{10}\right)^4 - 1\right)}{\frac{11}{10} - 1} = \frac{4641 \cdot 10}{10000 \cdot 1} = \frac{4641}{1000}$$

Уравнение примет вид:

$$\left(\frac{11}{10}\right)^4 S - x \cdot \frac{4641}{1000} = 0 \Rightarrow S = \frac{4641x \cdot 10000}{1000 \cdot 14641} = \frac{4641x \cdot 10}{14641} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{4641 \cdot 2928200 \cdot 10}{14641} = 9282000.$$

Таким образом, Михаил взял в банке 9282000 рублей.

Ответ: 9282000 рублей.

2. В июле 2020 года планируется взять кредит на некоторую сумму. Условия возврата таковы:

- в январе каждого года долг увеличивается на 30% по сравнению с предыдущим годом;

- с февраля по июнь нужно выплатить часть долга одним платежом.

Определите, на какую сумму взяли кредит в банке, если известно, что кредит был выплачен тремя равными платежами (за 3 года) и общая сумма выплат на 78030 рублей больше суммы взятого в кредит.

Дано:

S – сумма кредита

$$p = 30\% = \frac{3}{10}$$

$n = 3$ года

$$c_1 = c_2 = c_3 = x$$

$$c_1 + \dots + c_3 - S = 78030 \text{ руб.}$$

Решение:

I. Строим модель

$$1) S \cdot \frac{13}{10} - \text{долг перед 1-ым платежом}$$

$$S \cdot \frac{13}{10} - x - \text{долг после 1-го платежа}$$

$$2) \left(S \cdot \frac{13}{10} - x\right) \frac{13}{10} = S \left(\frac{13}{10}\right)^2 - x \cdot \frac{13}{10} - \text{долг перед 2-ым платежом}$$

$S - ?$

$$S \left(\frac{13}{10}\right)^2 - x \cdot \frac{13}{10} - x - \text{долг после 2-го платежа}$$

$$3) S \left(\frac{13}{10}\right)^3 - x \cdot \left(\frac{13}{10}\right)^2 - x \cdot \frac{13}{10} - \text{долг перед 3-им платежом}$$

$$S \left(\frac{13}{10}\right)^3 - x \cdot \left(\frac{13}{10}\right)^2 - x \cdot \frac{13}{10} - x = 0 - \text{долг после 3-го платежа}$$

II. Вычисления

$$S \left(\frac{13}{10}\right)^3 - x \cdot \left(\frac{13}{10}\right)^2 - x \cdot \frac{13}{10} - x = 0 \Rightarrow$$

$$S \left(\frac{13}{10}\right)^3 - x \left(\left(\frac{13}{10}\right)^2 + \frac{13}{10} + 1\right) = 0$$

$$1, \frac{13}{10}, \left(\frac{13}{10}\right)^2 - \text{геометрическая прогрессия, } q = \frac{13}{10}$$

$$1 + \frac{13}{10} + \left(\frac{13}{10}\right)^2 = \frac{1 \cdot \left(\left(\frac{13}{10}\right)^3 - 1\right)}{\frac{13}{10} - 1} = \frac{1197 \cdot 10}{1000 \cdot 3} = \frac{399}{100}$$

Уравнение примет вид:

$$S \left(\frac{13}{10}\right)^3 - x \cdot \frac{399}{100} = 0 \Rightarrow S = \frac{399x \cdot 1000}{100 \cdot 2197} = \frac{399x \cdot 10}{2197}$$

$$c_1 = c_2 = c_3 = x \text{ и } c_1 + \dots + c_3 - S = 78030 \text{ руб.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x = 78030 + S \text{ и } S = \frac{133 \cdot 3x \cdot 10}{2197} \Rightarrow S = \frac{133 \cdot (78030 + S) \cdot 10}{2197} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1330 \cdot 78030 + 1330 \cdot S - 2197S}{2197} = 0 \Rightarrow 1330 \cdot 78030 - 867S = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{1330 \cdot 78030}{867} = 119700.$$

Таким образом, взяли кредит на сумму 119700 рублей.

Ответ: 119700 рублей.

3. В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 928200 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

Дано:

$$S = 928200 \text{ руб.}$$

$$p = 10\% = \frac{1}{10}$$

$$n = 4 \text{ года}$$

$$c_1 = \dots = c_4 = x$$

Решение:

I. Строим модель

$$1) S \cdot \frac{11}{10} - \text{долг перед 1-ым платежом}$$

$$S \cdot \frac{11}{10} - x - \text{долг после 1-го платежа}$$

$$2) \left(S \cdot \frac{11}{10} - x\right) \frac{11}{10} = S \left(\frac{11}{10}\right)^2 - x \cdot \frac{11}{10} - \text{долг перед 2-ым платежом}$$

$$c_1 + \dots + c_4 - ?$$

$$S \left(\frac{11}{10}\right)^2 - x \cdot \frac{11}{10} - x - \text{долг после 2-го платежа}$$

...

$$4) S\left(\frac{11}{10}\right)^4 - x \cdot \left(\frac{11}{10}\right)^3 - x \cdot \left(\frac{11}{10}\right)^2 - x \cdot \frac{11}{10} - \text{долг перед 4-ым платежом}$$

$$S\left(\frac{11}{10}\right)^4 - x \cdot \left(\frac{11}{10}\right)^3 - x \cdot \left(\frac{11}{10}\right)^2 - x \cdot \frac{11}{10} - x = 0 \quad - \text{долг после 4-го платежа}$$

II. Вычисления

$$S\left(\frac{11}{10}\right)^4 - x \cdot \left(\frac{11}{10}\right)^3 - x \cdot \left(\frac{11}{10}\right)^2 - x \cdot \frac{11}{10} - x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S\left(\frac{11}{10}\right)^4 - x \left(\left(\frac{11}{10}\right)^3 + \left(\frac{11}{10}\right)^2 + \frac{11}{10} + 1 \right) = 0$$

$$1, \frac{11}{10}, \left(\frac{11}{10}\right)^2, \left(\frac{11}{10}\right)^3 - \text{геометрическая прогрессия, } q = \frac{11}{10}$$

$$1 + \frac{11}{10} + \left(\frac{11}{10}\right)^2 + \left(\frac{11}{10}\right)^3 = \frac{1 \cdot \left(\left(\frac{11}{10}\right)^4 - 1\right)}{\frac{11}{10} - 1} = \frac{4641 \cdot 10}{10000 \cdot 1} = \frac{4641}{1000}$$

Уравнение примет вид:

$$S\left(\frac{11}{10}\right)^4 - x \cdot \frac{4641}{1000} = 0 \Rightarrow x = \frac{14641S \cdot 1000}{10000 \cdot 4641} = \frac{14641S}{10 \cdot 4641}$$

$$c_1 + \dots + c_4 = 4x = \frac{4 \cdot 14641S}{10 \cdot 4641} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1 + \dots + c_4 = \frac{4 \cdot 14641 \cdot 928200}{10 \cdot 4641} = 1171280$$

Таким образом, 1171280 рублей будет выплачено банку.

Ответ: 1171280 рублей.

4. 31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 9282000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплат кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Алексей переводит в банк x рублей. Какой должна быть сумма x , чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

Дано:

$$S = 9282000 \text{ руб.}$$

$$p = 10\% = \frac{1}{10}$$

$$n = 4 \text{ года}$$

$$c_1 = \dots = c_4 = x$$

Решение:

I. Строим модель

$$1) S \cdot \frac{11}{10} - \text{долг перед 1-ым платежом}$$

$$S \cdot \frac{11}{10} - x - \text{долг после 1-го платежа}$$

$$2) \left(S \cdot \frac{11}{10} - x \right) \frac{11}{10} = S \left(\frac{11}{10} \right)^2 - x \cdot \frac{11}{10} - \text{долг перед 2-ым платежом}$$

$$x - ?$$

$$S \left(\frac{11}{10} \right)^2 - x \cdot \frac{11}{10} - x - \text{долг после 2-го платежа}$$

...

$$4) S \left(\frac{11}{10} \right)^4 - x \cdot \left(\frac{11}{10} \right)^3 - x \cdot \left(\frac{11}{10} \right)^2 - x \cdot \frac{11}{10} - \text{долг перед 4-ым платежом}$$

$$S \left(\frac{11}{10} \right)^4 - x \cdot \left(\frac{11}{10} \right)^3 - x \cdot \left(\frac{11}{10} \right)^2 - x \cdot \frac{11}{10} - x = 0 - \text{долг после 4-го платежа}$$

II. Вычисления

$$S \left(\frac{11}{10} \right)^4 - x \cdot \left(\frac{11}{10} \right)^3 - x \cdot \left(\frac{11}{10} \right)^2 - x \cdot \frac{11}{10} - x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S \left(\frac{11}{10} \right)^4 - x \left(\left(\frac{11}{10} \right)^3 + \left(\frac{11}{10} \right)^2 + \frac{11}{10} + 1 \right) = 0$$

$$1, \frac{11}{10}, \left(\frac{11}{10} \right)^2, \left(\frac{11}{10} \right)^3 - \text{геометрическая прогрессия, } q = \frac{11}{10}$$

$$1 + \frac{11}{10} + \left(\frac{11}{10} \right)^2 + \left(\frac{11}{10} \right)^3 = \frac{1 \cdot \left(\left(\frac{11}{10} \right)^4 - 1\right)}{\frac{11}{10} - 1} = \frac{4641 \cdot 10}{10000 \cdot 1} = \frac{4641}{1000}$$

Уравнение примет вид:

$$S \left(\frac{11}{10} \right)^4 - x \cdot \frac{4641}{1000} = 0 \Rightarrow x = \frac{14641S \cdot 1000}{10000 \cdot 4641} = \frac{14641S}{10 \cdot 4641}$$

$$x = \frac{14641 \cdot 9282000}{10 \cdot 4641} = 2928200$$

Таким образом, каждый из платежей составит 2928200 рублей.

Ответ: 2928200 рублей.

5. В июле планируется взять кредит на сумму 2320500 рублей.

Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей больше придется отдать в случае, если кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за 4 года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за 2 года)?

Дано:

$$S = 2320500 \text{ руб.}$$

$$p = 10\% = \frac{1}{10}$$

$$n_1 = 4 \text{ года}$$

$$n_2 = 2 \text{ года}$$

$$x_1 = \dots = x_4 = x - \text{платежи}$$

$$y_1 = y_2 = y - \text{платежи}$$

$$(4x - 2y) - ?$$

Решение:

Пусть платежи выплачиваются в марте

I. Строим модель для $n_1 = 4$

	Дата	Долг
1	июль	S
	январь	$\frac{11}{10}S$
	март	$\frac{11}{10}S - x$
2	январь	$\left(\frac{11}{10}\right)^2 S - \frac{11}{10}x$
	март	$\left(\frac{11}{10}\right)^2 S - \frac{11}{10}x - x$
	...	
4	январь	$\left(\frac{11}{10}\right)^4 S - \left(\frac{11}{10}\right)^3 x - \left(\frac{11}{10}\right)^2 x - \frac{11}{10}x$
	март	$\left(\frac{11}{10}\right)^4 S - \left(\frac{11}{10}\right)^3 x - \left(\frac{11}{10}\right)^2 x - \frac{11}{10}x - x = 0$

Строим модель для $n_2 = 2$

	Дата	Долг
1	июль	S
	январь	$\frac{11}{10}S$
	март	$\frac{11}{10}S - y$
2	январь	$\left(\frac{11}{10}\right)^2 S - \frac{11}{10}y$
	март	$\left(\frac{11}{10}\right)^2 S - \frac{11}{10}y - y = 0$

II. Вычисления

Найдем x :

$$\left(\frac{11}{10}\right)^4 S - \left(\frac{11}{10}\right)^3 x - \left(\frac{11}{10}\right)^2 x - \frac{11}{10}x - x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S \left(\frac{11}{10}\right)^4 - x \left(\left(\frac{11}{10}\right)^3 + \left(\frac{11}{10}\right)^2 + \frac{11}{10} + 1 \right) = 0$$

$1, \frac{11}{10}, \left(\frac{11}{10}\right)^2, \left(\frac{11}{10}\right)^3$ – геометрическая прогрессия, $q = \frac{11}{10}$

$$1 + \frac{11}{10} + \left(\frac{11}{10}\right)^2 + \left(\frac{11}{10}\right)^3 = \frac{1 \cdot \left(\left(\frac{11}{10}\right)^4 - 1\right)}{\frac{11}{10} - 1} = \frac{4641 \cdot 10}{10000 \cdot 1} = \frac{4641}{1000}$$

Уравнение примет вид:

$$S \left(\frac{11}{10}\right)^4 - x \cdot \frac{4641}{1000} = 0 \Rightarrow x = \frac{14641S \cdot 1000}{10000 \cdot 4641} = \frac{14641S}{10 \cdot 4641}$$

$$x = \frac{14641 \cdot 2320500}{10 \cdot 4641} = 732050$$

Найдем y :

$$\left(\frac{11}{10}\right)^2 S - \frac{11}{10}y - y = 0 \Rightarrow \left(\frac{11}{10}\right)^2 S - y \cdot \frac{21}{10} = 0 \Rightarrow y = \frac{121S \cdot 10}{100 \cdot 21} =$$

$$= \frac{121S}{10 \cdot 21}$$

$$y = \frac{121 \cdot 2320500}{10 \cdot 21} = 1337050$$

$$4x - 2y = 4 \cdot 732050 - 2 \cdot 1337050 = 2928200 - 2674100 = 254100$$

Таким образом, придется отдать больше на 254100 рублей.

Ответ: 254100 рублей.

6. 31 декабря 2014 года Петр взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $a\%$), затем Петр переводит очередной транш. Если он будет платить каждый год по 2592000 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 4392000 рублей, то за 2 года. Под какой процент Петр взял деньги в банке.

Дано:

S – ? руб.

$$p = a\% = \frac{a}{100}$$

$n_1 = 4$ года

$n_2 = 2$ года

$$x_1 = \dots = x_4 = x =$$

$$= 2592000 \text{ руб.}$$

$$\frac{y_1 = y_2 = y = 4392000 \text{ руб.}}{a - ?}$$

Решение:

$$\text{Обозначим } 1 + \frac{a}{100} = k$$

Пусть платежи выплачиваются в марте

I. Строим модель для $n_1 = 4$

	Дата	Долг
0	декабрь	S
1	декабрь	Sk
	март	$Sk - x$
2	декабрь	$k^2S - kx$
	март	$k^2S - kx - x$
	...	
4	декабрь	$k^4S - k^3x - k^2x - kx$
	март	$k^4S - k^3x - k^2x - kx - x = 0$

Строим модель для $n_2 = 2$

	Дата	Долг
0	декабрь	S
1	декабрь	Sk
	март	$Sk - y$
2	декабрь	$k^2S - ky$
	март	$k^2S - ky - y = 0$

II. Вычисления

$$k^4S - k^3x - k^2x - kx - x = 0 \Rightarrow S = \frac{k^3x + k^2x + kx + x}{k^4} =$$

$$= \frac{x(k^3 + k^2 + k + 1)}{k^4}$$

$1, k, k^2, k^3$ – геометрическая прогрессия, $q = k$

$$1 + k + k^2 + k^3 = \frac{1 \cdot (k^4 - 1)}{k - 1} = \frac{k^4 - 1}{k - 1}$$

Уравнение примет вид:

$$S = \frac{x(k^4 - 1)}{k^4(k - 1)}$$

$$k^2S - ky - y = 0 \Rightarrow S = \frac{y(k + 1)}{k^2}$$

$$\frac{x(k^4 - 1)}{k^4(k - 1)} = \frac{y(k + 1)}{k^2} \Rightarrow \frac{x(k^2 + 1)(k + 1)(k - 1)}{k^4(k - 1)} = \frac{y(k + 1)}{k^2} \Rightarrow x(k^2 + 1) =$$

$$= yk^2 \Rightarrow (x - y)k^2 + x = 0 \Rightarrow k^2 = \frac{x}{y-x}$$

$$k^2 = \frac{2592000}{4392000 - 2592000} = \frac{2592000}{1800000} = \frac{144}{100} \Rightarrow k = \frac{12}{10} \quad (\text{корень } -\frac{12}{10} \text{ не удовлетворяет условию задачи}).$$

$$1 + \frac{a}{100} = \frac{12}{10} \Rightarrow \frac{a}{100} = \frac{2}{10} \Rightarrow a = \frac{200}{10} = 20.$$

Таким образом, Петр взял кредит в банке под 20%.

Ответ: 20%.

7. Тимофей хочет взять в кредит 1,1 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет Тимофей может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 270 тысяч рублей?

Дано:

$$S = 1,1 \text{ млн руб.}$$

$$p = 10\% = \frac{1}{10}$$

$$c_1 = \dots = c_n = x$$

$$x \leq 0,27 \text{ млн руб.}$$

Решение:

I. Строим модель

$$1) S \cdot \frac{11}{10} - \text{долг перед 1-ым платежом}$$

$$S \cdot \frac{11}{10} - x - \text{долг после 1-го платежа}$$

$$2) \left(S \cdot \frac{11}{10} - x \right) \frac{11}{10} = S \left(\frac{11}{10} \right)^2 - x \cdot \frac{11}{10} - \text{долг перед 2-ым платежом}$$

$$n_{\min} - ?$$

$$S \left(\frac{11}{10} \right)^2 - x \cdot \frac{11}{10} - x - \text{долг после 2-го платежа}$$

...

$$n) S \left(\frac{11}{10} \right)^n - x \cdot \left(\frac{11}{10} \right)^{n-1} - \dots - x \cdot \left(\frac{11}{10} \right)^2 - x \cdot \frac{11}{10} - \text{долг перед } n\text{-ым платежом}$$

$$S \left(\frac{11}{10} \right)^n - x \cdot \left(\frac{11}{10} \right)^{n-1} - \dots - x \cdot \left(\frac{11}{10} \right)^2 - x \cdot \frac{11}{10} - x = 0 - \text{долг после } n\text{-го платежа}$$

II. Вычисления

$$S \left(\frac{11}{10} \right)^n - x \cdot \left(\frac{11}{10} \right)^{n-1} - \dots - x \cdot \left(\frac{11}{10} \right)^2 - x \cdot \frac{11}{10} - x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S \left(\frac{11}{10} \right)^n - x \left(\left(\frac{11}{10} \right)^{n-1} + \dots + \left(\frac{11}{10} \right)^2 + \frac{11}{10} + 1 \right) = 0$$

$1, \frac{11}{10}, \left(\frac{11}{10} \right)^2, \dots, \left(\frac{11}{10} \right)^{n-1}$ – геометрическая прогрессия, $q = \frac{11}{10}$

$$1 + \frac{11}{10} + \left(\frac{11}{10} \right)^2 + \dots + \left(\frac{11}{10} \right)^{n-1} = \frac{1 \cdot \left(\left(\frac{11}{10} \right)^n - 1\right)}{\frac{11}{10} - 1} = \frac{(11^n - 10^n) \cdot 10}{10^n \cdot 1} = \frac{11^n - 10^n}{10^{n-1}}$$

Уравнение примет вид:

$$S \left(\frac{11}{10} \right)^n - x \cdot \frac{11^n - 10^n}{10^{n-1}} = 0 \Rightarrow x = \frac{11^n S \cdot 10^{n-1}}{10^n \cdot (11^n - 10^n)} = \frac{11^n S}{10 \cdot (11^n - 10^n)}$$

$$x = \frac{11^n \cdot 11}{100 \cdot (11^n - 10^n)}, x \leq \frac{27}{100} \Rightarrow \frac{11^n \cdot 11}{100 \cdot (11^n - 10^n)} \leq \frac{27}{100} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{11^n}{11^n - 10^n} \leq \frac{27}{11} \Rightarrow \frac{11^n}{11^n - 10^n} \leq 2 \frac{5}{11}$$

$$n = 1, \frac{11}{1} \leq 2 \frac{5}{11} - \text{неверно};$$

...

$$n = 5, \frac{161051}{61051} \leq 2 \frac{5}{11} - \text{неверно};$$

$$n = 6, \frac{1771561}{771561} \leq 2 \frac{5}{11} - \text{верно}.$$

Таким образом, Тимофей может взять кредит на 6 лет.

Ответ: 6 лет.

Разные платежи

1. В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S – целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Месяц и год	Июль 2019	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022
Долг (в млн рублей)	S	$0,7S$	$0,4S$	0

Найдите наименьшее значение S , при котором каждая из выплат будет больше 5 млн. руб.

Дано:

S – ? млн руб., $S \in \mathbb{Z}$

$$p = 25\% = \frac{1}{4}$$

$n = 3$ года

$c_1, c_2, c_3 > 5$ млн руб.

Решение:

Пусть платежи выплачиваются в марте

I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
1	июль	S	
	январь	$1,25S$	
	март	$1,25S - c_1 = 0,7S$	$0,55S$
2	июль	$0,7S$	
	январь	$1,25 \cdot 0,7S = 0,875S$	
	март	$0,875S - c_2 = 0,4S$	$0,475S$
3	июль	$0,4S$	
	январь	$1,25 \cdot 0,4S = 0,5S$	
	март	$0,5S - c_3 = 0$	$0,5S$

Т.к. каждая из выплат должна быть больше 5 млн руб., то составим систему неравенств:

$$\begin{cases} 0,55S > 5 \\ 0,475S > 5 \\ 0,5S > 5 \end{cases}$$

II. Вычисления

$$\begin{cases} 0,55S > 5 \\ 0,475S > 5 \\ 0,5S > 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S > 9\frac{1}{11} \\ S > 10\frac{10}{19} \\ S > 10 \end{cases} \Rightarrow S > 10\frac{10}{19}$$

Таким образом, при условии, что $S \in \mathbb{Z}$, $S_{\min} = 11$ млн руб.

Ответ: 11.

2. В июле 2016 года планируется взять кредит в банке в размере S тыс. рублей, где S – натуральное число, на 3 года. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 17,5% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн рублей)	S	$0,9S$	$0,4S$	0

Найдите наименьшее значение S , при котором каждая из выплат будет составлять целое число тысяч рублей.

Дано:

S – ? тыс. руб., $S \in \mathbb{N}$

$p = 17,5\% = \frac{7}{40}$

$n = 3$ года

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{Z}$ тыс. руб.

Решение:

Пусть платежи выплачиваются в марте

I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
1	июль	S	
	январь	$1,175S$	
	март	$1,175S - c_1 = 0,9S$	$0,275S$
2	июль	$0,9S$	
	январь	$1,175 \cdot 0,9S = 1,0575S$	
	март	$1,0575S - c_2 = 0,4S$	$0,6575S$
3	июль	$0,4S$	
	январь	$1,175 \cdot 0,4S = 0,47S$	
	март	$0,47S - c_3 = 0$	$0,47S$

$S_{\min} = ?$

II. Вычисления

$$c_1 = 0,275S = \frac{11}{40}S; c_2 = 0,6575S = \frac{263}{400}S; c_3 = 0,47S = \frac{47}{100}S$$

Т.к. $S \in \mathbb{N}$, каждая выплата – целое число тыс. руб., то $S : 40$;
 $S : 400$; $S : 100$, то наименьшее возможное $S = 400$ тыс. руб.
 Ответ: 400.

3. В июле 2018 года планируется взять кредит в банке на шесть лет в размере S тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 1% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Месяц и год	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022	Июль 2023	Июль 2024
Долг (в млн рублей)	S	$0,9S$	$0,8S$	$0,7S$	$0,6S$	$0,5S$	0

Найдите S , если общая сумма выплат после полного погашения кредита составила 836 тысяч рублей.

Дано:
 S – ? тыс. руб.
 $p = 1\% = \frac{1}{100}$
 $n = 6$ лет
 $c_1 + \dots + c_6 = 836$ тыс. руб.

S – ?

Решение:
 Пусть платежи выплачиваются в марте
 I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
1	июль	S	
	январь	$1,01S$	
	март	$1,01S - c_1 = 0,9S$	$0,110S$
2	июль	$0,9S$	
	январь	$1,01 \cdot 0,9S = 0,909S$	
	март	$0,909S - c_2 = 0,8S$	$0,109S$
3	июль	$0,8S$	
	январь	$1,01 \cdot 0,8S = 0,808S$	
	март	$0,808S - c_3 = 0,7S$	$0,108S$
	...		
6	июль	$0,5S$	
	январь	$1,01 \cdot 0,5S = 0,505S$	
	март	$0,505S - c_4 = 0$	$0,505S$

Т.к. сумма выплат должна быть меньше 836 тыс. руб., то составим уравнение:
 $0,11S + 0,109S + 0,108S + 0,107S + 0,106S + 0,505S = 836$

II. Вычисления

$$0,11S + 0,109S + 0,108S + 0,107S + 0,106S + 0,505S = 836 \Rightarrow \Rightarrow 1,045S = 836 \Rightarrow S = 800.$$

Таким образом, $S = 800$ тыс. руб.

Ответ: 800.

4. Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на четыре года. В середине каждого года действия кредита долг заемщика возрастает на 25% по сравнению с началом года. В конце 1-го и 2-го годов заемщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 3-го и 4-го годов заемщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наименьший размер кредита, при котором общая сумма выплат заемщика превысит 9 млн рублей.

Дано:

S – ? млн руб., $S \in \mathbb{Z}$

$$p = 25\% = \frac{1}{4}$$

$n = 4$ года

$$c_1 + \dots + c_4 > 9 \text{ млн руб.}$$

$$c_3 = c_4 = x$$

$$S_{\min} = ?$$

Решение:

Пусть кредит выдан в январе, долг возрастает в июле, а платежи выплачиваются в ноябре

I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
1	январь	S	
	июль	$1,25S$	
	ноябрь	$1,25S - c_1 = S$	$0,25S$
2	январь	S	
	июль	$1,25S$	
	ноябрь	$1,25S - c_2 = S$	$0,25S$
3	январь	S	
	июль	$1,25S$	
	ноябрь	$1,25S - x$	x
4	январь	$1,25S - x$	
	июль	$1,25(1,25S - x)$	
	ноябрь	$1,25(1,25S - x) - x = 0$	x

Т.к. сумма выплат должна быть больше 9 млн руб., то составим систему:

$$\begin{cases} 1,25(1,25S - x) - x = 0 \\ 0,25S + 0,25S + x + x > 9 \end{cases}$$

II. Вычисления

$$\begin{aligned} \begin{cases} 1,25(1,25S - x) - x = 0 \\ 0,25S + 0,25S + x + x > 9 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{25}{16}S - \frac{9}{4}x = 0 \\ 0,5S + 2x > 9 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} 25S - 36x = 0 \\ S + 4x > 18 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{25}{36}S \\ S + 4x > 18 \end{cases} \Rightarrow S + 4 \cdot \frac{25}{36}S > 18 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{34}{9}S > 18 \Rightarrow S > \frac{162}{34} &\Rightarrow S > 4\frac{13}{17} \end{aligned}$$

Таким образом, при условии, что $S \in \mathbb{Z}$, $S_{min} = 5$ млн руб.

Ответ: 5.

5. В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на пять лет в размере S тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле 2017, 2018 и 2019 долг остается равным S тыс. рублей;
- выплаты в 2020 и 2021 годах равны по 625 тыс. рублей;
- к июлю 2021 долг будет выплачен полностью.

Найдите общую сумму выплат за пять лет.

Дано:

S – ? тыс. руб.

$p = 25\% = \frac{1}{4}$

$n = 5$ лет

$c_4 = c_5 = x =$
 $= 625$ тыс. руб.

Решение:

Пусть платежи выплачиваются в марте

I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
2016	июль	S	
2017	январь	$1,25S$	
	март	$1,25S - c_1 = S$	$0,25S$
	июль	S	
2018	январь	$1,25S$	
	март	$1,25S - c_2 = S$	$0,25S$
	июль	S	
2019	январь	$1,25S$	
	март	$1,25S - c_3 = S$	$0,25S$

$c_1 + \dots + c_5 = ?$

	июль	S	
2020	январь	$1,25S$	
	март	$1,25S - x$	x
	июль	$1,25S - x$	
2021	январь	$1,25^2S - 1,25x$	
	март	$1,25^2S - 1,25x - x = 0$	x
	июль	0	

II. Вычисления

$$1,25^2S - 1,25x - x = 0 \Rightarrow \frac{25}{16}S - \frac{9}{4}x = 0 \Rightarrow S = \frac{36x}{25}$$

$$c_1 + \dots + c_5 = 0,25S + 0,25S + 0,25S + x + x = 0,75S + 2x =$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{36x}{25} + 2x = \frac{27x}{25} + 2x = \frac{77x}{25}$$

$$c_1 + \dots + c_5 = \frac{77 \cdot 625}{25} = 1925$$

Таким образом, общая сумма выплат составит 1925 тыс. руб. или 1925000 руб.

Ответ: 1925000.

6. Георгий взял кредит в банке на сумму 804000 рублей. Схема выплаты кредита такова: в конце каждого года банк увеличивает на 10 процентов оставшуюся сумму долга, а затем Георгий переводит в банк свой очередной платеж. Известно, что Георгий погасил кредит за три года, причем каждый его следующий платеж был ровно вдвое меньше предыдущего. Какую сумму Георгий заплатил в третий раз? Ответ дайте в рублях.

Дано:

$$S = 804000 \text{ руб.}$$

$$p = 10\% = \frac{1}{10}$$

$$n = 3 \text{ года}$$

$$c_3 = x$$

$$c_2 = 2c_3 = 2x$$

$$c_1 = 2c_2 = 4x$$

$$c_3 = ?$$

Решение:

Пусть кредит взят в январе, в декабре долг увеличивается, платежи выплачиваются в марте

I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	январь	S	
1	декабрь	$1,1S$	
	март	$1,1S - 4x$	$4x$
2	декабрь	$1,1^2S - 4,4x$	
	март	$1,1^2S - 4,4x - 2x$	$2x$
3	декабрь	$1,1^3S - 4,84x - 2,2x$	
	март	$1,1^3S - 4,84x - 2,2x - x = 0$	x

II. Вычисления

$$1,1^3 S - 4,84x - 2,2x - x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1,1^3 S - x(4,84 + 2,2 + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1,331S}{8,04} = \frac{1331S}{8040} \Rightarrow x = \frac{1331 \cdot 804000}{8040} = 133100$$

Таким образом, Георгий заплатил в третий раз 133100 руб.

Ответ: 133100.

7. В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 600000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Найдите r , если известно, что кредит будет полностью погашен за два года, причем в первый год будет выплачено 360000 рублей, а во второй год – 330000 рублей.

Дано:

$S = 600000$ руб.

$$p = r\% = \frac{r}{100}$$

$n = 2$ года

$c_1 = 360000$ руб.

$c_2 = 330000$ руб.

$r = ?$

Решение:

Обозначим $1 + \frac{r}{100} = k, k > 1 \dots (*)$

Пусть платежи выплачиваются в марте

I. Строим модель

	Дата	Долг
0	июль	S
1	январь	Sk
	март	$Sk - c_1$
2	январь	$k^2 S - kc_1$
	март	$k^2 S - kc_1 - c_2 = 0$

II. Вычисления

$$k^2 S - kc_1 - c_2 = 0 \Rightarrow$$

$$k^2 \cdot 600000 - k \cdot 360000 - 330000 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^2 \cdot 20 - k \cdot 12 - 11 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{11}{10} \\ k_2 = -\frac{1}{2} - \text{не удовл. усл. } (*) \end{cases}$$

$$1 + \frac{r}{100} = \frac{11}{10} \Rightarrow \frac{r}{100} = \frac{1}{10} \Rightarrow r = \frac{100}{10} = 10.$$

Таким образом, долг увеличивается каждый год на 10%.

Ответ: $r = 10$.

8. 15-го января планируется взять кредит в банке на 6 месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на целое число r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей

Месяц и год	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль
Долг (в млн рублей)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение r , при котором общая сумма выплат будет составлять менее 1,25 млн рублей.

Дано:

$S = 1$ млн руб.

$p = r\% = \frac{r}{100}, r \in \mathbb{Z}$

$n = 6$ месяцев

$c_1 + \dots + c_6 < 1,25$ млн руб.

Решение:

Обозначим $1 + \frac{r}{100} = k, k > 1 \dots (*)$

Пусть платежи выплачиваются 7 числа

I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	15.01	1	
1	01.02	$k \cdot 1$	
	07.02	$k \cdot 1 - c_1 = 0,6$	$k - 0,6$
	15.02	0,6	
2	01.03	$0,6k$	
	07.03	$0,6k - c_2 = 0,4$	$0,6k - 0,4$
	15.03	0,4	
3	01.04	$0,4k$	
	07.04	$0,4k - c_3 = 0,3$	$0,4k - 0,3$
	15.04	0,3	
4	01.05	$0,3k$	
	07.05	$0,3k - c_4 = 0,2$	$0,3k - 0,2$

$r_{\max} - ?$

	15.05	0,2	
5	01.06	0,2k	
	07.06	$0,2k - c_5 = 0,1$	$0,2k - 0,1$
	15.06	0,1	
6	01.07	0,1k	
	07.07	$0,1k - c_6 = 0$	0,1k
	15.07	0	

Т.к. сумма выплат должна быть меньше 1,2 млн руб., то составим неравенство:

$$(k - 0,6) + (0,6k - 0,4) + (0,4k - 0,3) + (0,3k - 0,2) + (0,2k - 0,1) + 0,1k < 1,25$$

II. Вычисления

$$\begin{aligned} & (k - 0,6) + (0,6k - 0,4) + (0,4k - 0,3) + (0,3k - 0,2) + \\ & + (0,2k - 0,1) + 0,1k < 1,25 \Rightarrow 2,6k - 1,6 < 1,25 \Rightarrow \\ & \Rightarrow 2,6k < 2,85 \Rightarrow k < \frac{57}{52} \Rightarrow k < 1 \frac{5}{52} \Rightarrow 1 + \frac{r}{100} < 1 \frac{5}{52} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \frac{r}{100} < \frac{5}{52} \Rightarrow r < \frac{500}{52} \Rightarrow r < 9 \frac{8}{13} \end{aligned}$$

Таким образом, при условии, что $r \in \mathbb{Z}, r_{\max} = 9$

Ответ: 9.

9. В декабре 2018 г. планируется взять кредит в банке на четыре года в размере 3 млн руб. Условия его возврата таковы:

- в январе каждого года долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего года, где r – целое число;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- 1 июля каждого года долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей:

Месяц и год	01.07.2019	01.07.2020	01.07.2021	01.07.2022
Долг (в млн рублей)	2,2	1,4	0,6	0

Найдите наименьшее значение r , при котором общая сумма выплат будет составлять более 4,12 млн руб.

Дано:

$$S = 3 \text{ млн руб.}$$

$$p = r\% = \frac{r}{100}, r \in \mathbb{Z}$$

$$n = 4 \text{ года}$$

$$c_1 + \dots + c_4 > 4,12 \text{ млн руб.}$$

Решение:

$$\text{Обозначим } 1 + \frac{r}{100} = k, k > 1 \dots (*)$$

Пусть платежи выплачиваются в марте

I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
2018	декабрь	3	
2019	январь	$k \cdot 3$	
	март	$k \cdot 3 - c_1 = 2,2$	$3k - 2,2$
	июль	2,2	
2020	январь	$2,2k$	
	март	$2,2k - c_2 = 1,4$	$2,2k - 1,4$
	июль	1,4	
2021	январь	$1,4k$	
	март	$1,4k - c_3 = 0,6$	$1,4k - 0,6$
	июль	0,6	
2022	январь	$0,6k$	
	март	$0,6k - c_4 = 0$	$0,6k$
	июль	0	

Т.к. общая сумма выплат должна быть более 4,12 млн руб., то составим неравенство:

$$(3k - 2,2) + (2,2k - 1,4) + (1,4k - 0,6) + 0,6k > 4,12$$

II. Вычисления

$$(3k - 2,2) + (2,2k - 1,4) + (1,4k - 0,6) + 0,6k > 4,12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7,2k - 4,2 > 4,12 \Rightarrow 7,2k > 8,32 \Rightarrow k > 1\frac{7}{45} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{r}{100} > 1\frac{7}{45} \Rightarrow \frac{r}{100} > \frac{7}{45} \Rightarrow r > 15\frac{5}{9}$$

Таким образом, при условии, что $r \in \mathbb{Z}, r_{\min} = 16$

Ответ: 16.

10. В июле 2016 года планируется взять кредит в размере 6,6 млн. руб. Условия возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;

- в июле 2017, 2018 и 2019 годов долг остается равным 6,6 млн руб.;
- суммы выплат 2020 и 2021 годов равны.

Найдите r , если в 2021 году долг будет выплачен полностью и общие выплаты составят 12,6 млн рублей.

Дано:

$$S = 6,6 \text{ млн руб.}$$

$$p = r\% = \frac{r}{100}$$

$$n = 5 \text{ лет}$$

$$c_1 + \dots + c_5 = 12,6 \text{ млн руб.}$$

$$c_4 = c_5 = x$$

$r = ?$

Решение:

$$\text{Обозначим } 1 + \frac{r}{100} = k, k > 1 \dots (*)$$

Пусть платежи выплачиваются в марте

I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
2016	июль	S	
2017	январь	$k \cdot S$	
	март	$k \cdot S - c_1 = S$	$(k - 1)S$
	июль	S	
2018	январь	$k \cdot S$	
	март	$k \cdot S - c_2 = S$	$(k - 1)S$
	июль	S	
2019	январь	$k \cdot S$	
	март	$k \cdot S - c_3 = S$	$(k - 1)S$
	июль	S	
2020	январь	$k \cdot S$	
	март	$k \cdot S - x$	x
	июль	$k \cdot S - x$	
2021	январь	$(k \cdot S - x)k$	
	март	$k^2 S - kx - x = 0$	x
	июль	0	

Т.к. общая сумма выплат равна 12,6 млн руб. и кредит выплачен полностью, то составим систему уравнений:

$$\begin{cases} (k - 1)S + (k - 1)S + (k - 1)S + x + x = 12,6 \\ k^2 S - kx - x = 0 \end{cases}$$

II. Вычисления

$$\begin{cases} (k - 1)S + (k - 1)S + (k - 1)S + x + x = 12,6 \\ k^2 S - kx - x = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{12,6 - 3S(k - 1)}{2} \\ k^2 S - x(k + 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow k^2 6,6 - \frac{12,6 - 3 \cdot 6,6(k - 1)}{2} (k + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13,2k^2 - 12,6(k + 1) + 19,8(k^2 - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 33k^2 - 12,6k - 32,4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 55k^2 - 21k - 54 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = -\frac{9}{11} - \text{не удовл. усл. (*)} \\ k_2 = \frac{6}{5} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{r}{100} = \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{r}{100} = \frac{1}{5} \Rightarrow r = 20.$$

Таким образом, каждый январь долг возрастал на 20%.

Ответ: 20.

Равномерно уменьшающиеся платежи

1. 15 января планируется взять кредит в банке на 11 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного погашения равнялась 0,59 млн рублей?

Дано:

S – сумма кредита

$$p = 3\% = \frac{3}{100}$$

$n = 11$ месяцев

$$c_1 + \dots + c_{11} = 0,59 \text{ млн руб.}$$

x – фиксированный платеж

$S = ?$

Решение:

$$x = \frac{S}{n} \Rightarrow x = \frac{S}{11}$$

I. Строим модель

1) $S + \frac{3}{100}S = \frac{103}{100}S$ – долг перед 1-ым платежом

$$\frac{103}{100}S - \left(x + \frac{3}{100}S\right) = S - x \text{ – долг после 1-го платежа}$$

$$\text{Платеж: } x + \frac{3}{100}S$$

2) $(S - x) + \frac{3}{100}(S - x) = \frac{103}{100}(S - x)$ – долг перед 2-ым платежом

$$\frac{103}{100}(S - x) - \left(x + \frac{3}{100}(S - x)\right) = S - 2x \text{ – долг после 2-го платежа}$$

$$\text{Платеж: } x + \frac{3}{100}(S - x)$$

3) $(S - 2x) + \frac{3}{100}(S - 2x) = \frac{103}{100}(S - 2x)$ – долг перед 3-им платежом

$$\frac{103}{100}(S - 2x) - \left(x + \frac{3}{100}(S - 2x)\right) = S - 3x \text{ – долг после 3-го платежа}$$

$$\text{Платеж: } x + \frac{3}{100}(S - 2x)$$

...

10) $(S - 9x) + \frac{3}{100}(S - 9x) = \frac{103}{100}(S - 9x)$ – долг перед 10-ым платежом

$$\frac{103}{100}(S - 9x) - \left(x + \frac{3}{100}(S - 9x)\right) = S - 10x$$

– долг после 10-го платежа

Платеж: $x + \frac{3}{100}(S - 9x)$

$$11) \quad (S - 10x) + \frac{3}{100}(S - 10x) = \frac{103}{100}(S - 10x)$$

– долг перед 11-ым платежом

$$\frac{103}{100}(S - 10x) - \frac{103}{100}(S - 10x) = 0 \quad \text{– долг}$$

после 11-го платежа

Платеж: $\frac{103}{100}(S - 10x)$

Составим выражение (сумму платежей) и упростим:

$$\begin{aligned} c_1 + \dots + c_{11} &= \left(x + \frac{3}{100}S\right) + \left(x + \frac{3}{100}(S - x)\right) + \\ &+ \left(x + \frac{3}{100}(S - 2x)\right) + \dots + \left(x + \frac{3}{100}(S - 9x)\right) + \frac{103}{100}(S - 10x) = \\ &= 10x + \frac{3}{100}(S + (S - x) + (S - 2x) + \dots + (S - 9x)) + \\ &+ \frac{103}{100}(S - 10x) = 10x + \frac{3}{100}(10S - x(1 + 2 + \dots + 9)) + \\ &+ \frac{103}{100}(S - 10x) \\ 1 + 2 + \dots + 9 &\text{ – сумма арифметической прогрессии с } d = 1. \\ 1 + 2 + \dots + 9 &= \frac{1+9}{2} \cdot 9 = 45. \end{aligned}$$

Выражение примет вид:

$$\begin{aligned} c_1 + \dots + c_{11} &= 10x + \frac{3}{100}(10S - x \cdot 45) + \frac{103}{100}(S - 10x) = \\ &= \frac{133}{100}S + 10x - \frac{1165}{100}x = \frac{133}{100}S - \frac{165}{100}x = \frac{133}{100}S - \frac{33}{20}x. \end{aligned}$$

Т.к. общая сумма выплат равна 0,59 млн руб. и $x = \frac{S}{11}$, то составим

уравнение:

$$\frac{133}{100}S - \frac{33}{20} \cdot \frac{S}{11} = 0,59.$$

II. Вычисления

$$\frac{133}{100}S - \frac{33}{20} \cdot \frac{S}{11} = 0,59 \Rightarrow \frac{1298}{1100}S = \frac{59}{100} \Rightarrow S = \frac{59 \cdot 1100}{100 \cdot 1298} = 0,5$$

Таким образом, в кредит следует взять 0,5 млн рублей.

Ответ: 0,5.

2. 15 января планируется взять кредит в банке на 20 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что за первые 10 месяцев нужно выплатить банку 1179 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

Дано:

S – сумма кредита

$$p = 2\% = \frac{1}{50}$$

$n = 20$ месяцев

$$c_1 + \dots + c_{10} = 1179 \text{ тыс. руб.}$$

x – фиксированный платеж

Решение:

$$x = \frac{S}{n} \Rightarrow x = \frac{S}{20}$$

Пусть платеж выплачивается 7 числа

I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	15.01	S	
1	01.02	$1,02S$	
	07.02	$S - x$	$x + 0,02S$
	15.02	$S - x$	
2	01.03	$1,02(S - x)$	
	07.03	$S - 2x$	$x + 0,02(S - x)$
	15.03	$S - 2x$	
3	01.04	$1,02(S - 2x)$	
	07.04	$S - 3x$	$x + 0,02(S - 2x)$
	15.04	$S - 3x$	
	...		
10	01.11	$1,02(S - 9x)$	
	07.11	$S - 10x$	$x + 0,02(S - 9x)$
	15.11	$S - 10x$	
	...		

Составим выражение (сумму платежей) и упростим:

$$c_1 + \dots + c_{10} = (x + 0,02S) + (x + 0,02(S - x)) + \dots + (x + 0,02(S - 9x)) = 10x + 0,02(S + (S - x) + \dots + (S - 9x)) = 10x + 0,02(10S - x(1 + \dots + 9))$$

$1 + \dots + 9$ – сумма арифметической прогрессии с $d = 1$.

$$1 + \dots + 9 = \frac{1+9}{2} \cdot 9 = 45.$$

Выражение примет вид:

$$c_1 + \dots + c_{10} = 10x + 0,02(10S - 45x) = 10x + \frac{10}{50}S - \frac{45}{50}x = \frac{1}{5}S + \frac{91}{10}x.$$

Т.к. сумма выплат за первые 10 месяцев равна 1179 тыс. руб. и

$x = \frac{S}{20}$, то составим уравнение:

$$\frac{1}{5}S + \frac{91}{10} \cdot \frac{S}{20} = 1179.$$

II. Вычисления

$$\frac{1}{5}S + \frac{91}{10} \cdot \frac{S}{20} = 1179 \Rightarrow \frac{131}{200}S = 1179 \Rightarrow S = \frac{1179 \cdot 200}{131} = 1800$$

Таким образом, в кредит планируется взять 1800 тыс. руб. или 1800000 рублей.

Ответ: 1800000.

3. 15 января планируется взять кредит в банке на 18 месяцев.

Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?

Дано:

S – сумма кредита

$$p = 2\% = \frac{1}{50}$$

$n = 18$ месяцев

x – фиксированный платеж

S – 100%

$$c_1 + \dots + c_{18} - y\%$$

$$y\% = \frac{(c_1 + \dots + c_{18}) \cdot 100\%}{S}$$

Решение:

$$x = \frac{S}{n} \Rightarrow x = \frac{S}{18}$$

Пусть платеж выплачивается 7 числа

I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	15.01	S	
1	01.02	$1,02S$	
	07.02	$S - x$	$x + 0,02S$
	15.02	$S - x$	

y—?	2	01.03	$1,02(S - x)$	
		07.03	$S - 2x$	$x + 0,02(S - x)$
		15.03	$S - 2x$	
	3	01.04	$1,02(S - 2x)$	
		07.04	$S - 3x$	$x + 0,02(S - 2x)$
		15.04	$S - 3x$	
		...		
	17	01.06	$1,02(S - 16x)$	
		07.06	$S - 17x$	$x + 0,02(S - 16x)$
		15.06	$S - 17x$	
	18	01.07	$1,02(S - 17x)$	
		07.07	0	$1,02(S - 17x)$
		15.07	0	

Составим выражение (сумму платежей) и упростим:

$$c_1 + \dots + c_{18} = (x + 0,02S) + (x + 0,02(S - x)) + \dots + \\ + (x + 0,02(S - 16x)) + 1,02(S - 17x) = 17x + \\ + 0,02(17S - x(1 + 2 + \dots + 16)) + 1,02(S - 17x)$$

$1 + \dots + 16$ – сумма арифметической прогрессии с $d = 1$.

$$1 + \dots + 16 = \frac{1+16}{2} \cdot 16 = 136.$$

Выражение примет вид:

$$c_1 + \dots + c_{18} = 17x + 0,02(17S - 136x) + 1,02(S - 17x) = 17x + \\ + \frac{17}{50}S - \frac{136}{50}x + \frac{51}{50}S - \frac{51 \cdot 17}{50}x = \frac{34}{25}S - \frac{153}{50}x$$

II. Вычисления

$$y\% = \frac{(c_1 + \dots + c_5) \cdot 100\%}{S} \text{ и } x = \frac{S}{18}, \text{ тогда}$$

$$y\% = \frac{\frac{34}{25}S - \frac{153}{50} \cdot \frac{S}{18}}{S} \cdot 100\% = \left(\frac{34}{25} - \frac{17}{100} \right) \cdot 100\% = \frac{119}{100} \cdot 100\% = 119\%$$

Таким образом, 119% от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования.

Ответ: 119.

4. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наибольший годовой платеж составит 1,5 млн рублей?

Дано:

$$S = 9 \text{ млн руб.}$$

$$p = 10\% = \frac{1}{10}$$

n – количество лет

x – фиксированный платеж

$$c_{\max} = 1,5 \text{ млн руб.}$$

$$c_1 + \dots + c_n = ?$$

Решение:

$$x = \frac{S}{n} \Rightarrow x = \frac{9}{n}$$

$$c_{\max} = 1,5 \Rightarrow c_1 = 1,5$$

Пусть платеж выплачивается в марте

I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	июль	S	
1	январь	$1,1S$	
	март	$S - x$	$x + 0,1S$
	июль	$S - x$	

$$c_1 = 1,5, x = \frac{9}{n}, S = 9 \Rightarrow 1,5 = \frac{9}{n} + \frac{1}{10} \cdot 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1,5 = \frac{9}{n} + \frac{9}{10} \Rightarrow \frac{9}{n} = 0,6 \Rightarrow n = 15$$

Таким образом, кредит планируется взять на 15 лет и

$$x = \frac{9}{15} = 0,6.$$

2	январь	$1,1(S - x)$	
	март	$S - 2x$	$x + 0,1(S - x)$
	июль	$S - 2x$	
3	январь	$1,1(S - 2x)$	
	март	$S - 3x$	$x + 0,1(S - 2x)$
	июль	$S - 3x$	
	...		
14	январь	$1,1(S - 13x)$	
	март	$S - 14x$	$x + 0,1(S - 13x)$
	июль	$S - 14x$	
15	январь	$1,1(S - 14x)$	
	март	0	$1,1(S - 14x)$
	июль	0	

Составим выражение (сумму платежей) и упростим:

$$c_1 + \dots + c_{15} = (x + 0,1S) + (x + 0,1(S - x)) + \dots + (x + 0,1(S - 13x)) + 1,1(S - 14x) = 14x + 0,1(14S - x(1 + 2 + \dots + 13)) + 1,1(S - 14x)$$

$1 + \dots + 13$ – сумма арифметической прогрессии с $d = 1$.

$$1 + \dots + 13 = \frac{1+13}{2} \cdot 13 = 91.$$

Выражение примет вид:

$$c_1 + \dots + c_{15} = 14x + 0,1(14S - 91x) + 1,1(S - 14x) = 14x + \frac{7}{5}S - \frac{91}{10}x + \frac{11}{10}S - \frac{77}{5}x = \frac{5}{2}S - \frac{21}{2}x$$

II. Вычисления

$x = 0,6$ и $S = 9$, тогда

$$c_1 + \dots + c_{15} = \frac{5}{2} \cdot 9 - \frac{21}{2} \cdot 0,6 = 22,5 - 6,3 = 16,2$$

Таким образом, общая сумма выплат после полного погашения кредита будет равна 16,2 млн руб. или 16200000 рублей.

Ответ: 16200000.

5. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наименьший годовой платеж составит 825 тыс. рублей?

Дано:

$S = 9$ млн руб.

$p = 10\% = \frac{1}{10}$

n – количество лет

x – фиксированный платеж

Решение:

$$x = \frac{S}{n} \Rightarrow x = \frac{9}{n}$$

$$c_{min} = 0,825 \Rightarrow c_n = 0,825$$

Пусть платеж выплачивается в марте

I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	июль	S	

$c_{min} = 0,825$ млн
руб.

1	январь	$1,1S$	
	март	$S - x$	$x + 0,1S$
	июль	$S - x$	
2	январь	$1,1(S - x)$	
	март	$S - 2x$	$x + 0,1(S - x)$
	июль	$S - 2x$	
3	январь	$1,1(S - 2x)$	
	март	$S - 3x$	$x + 0,1(S - 2x)$
	июль	$S - 3x$	
	...		
$n - 1$	январь	$1,1(S - (n - 2)x)$	
	март	$S - (n - 1)x$	$x + 0,1(S - (n - 2)x)$
	июль	$S - (n - 1)x$	
n	январь	$1,1(S - (n - 1)x)$	
	март	0	$1,1(S - (n - 1)x)$
	июль	0	

$c_1 + \dots + c_n = ?$

$$c_n = 0,825, x = \frac{9}{n}, S = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,825 = 1,1 \left(9 - (n - 1) \cdot \frac{9}{n} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,75 = 9 - (n - 1) \cdot \frac{9}{n} \Rightarrow (n - 1) \cdot \frac{9}{n} = 8,25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9n - 9 = 8,25n \Rightarrow n = 12$$

Таким образом, кредит планируется взять на 12 лет и $x = \frac{9}{12} = 0,75$.

Последние два года в таблице будут выглядеть следующим образом:

11	январь	$1,1(S - 10x)$	
	март	$S - 11x$	$x + 0,1(S - 10x)$
	июль	$S - 11x$	
12	январь	$1,1(S - 11x)$	
	март	0	$1,1(S - 11x)$
	июль	0	

Составим выражение (сумму платежей) и упростим:

$$c_1 + \dots + c_{12} = (x + 0,1S) + (x + 0,1(S - x)) + \dots + (x + 0,1(S - 10x)) + 1,1(S - 11x) = 11x +$$

$$+0,1(11S - x(1 + 2 + \dots + 10)) + 1,1(S - 11x)$$

$1 + \dots + 10$ – сумма арифметической прогрессии с $d = 1$.

$$1 + \dots + 10 = \frac{1+10}{2} \cdot 10 = 55.$$

Выражение примет вид:

$$\begin{aligned} c_1 + \dots + c_{12} &= 11x + 0,1(11S - 55x) + 1,1(S - 11x) = \\ &= 11x + \frac{11}{10}S - \frac{11}{2}x + \frac{11}{10}S - \frac{121}{10}x = \frac{11}{5}S - \frac{33}{5}x \end{aligned}$$

II. Вычисления

$x = 0,75$ и $S = 9$, тогда

$$c_1 + \dots + c_{12} = \frac{11}{5} \cdot 9 - \frac{33}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{99}{5} - \frac{99}{20} = \frac{297}{20} = 14,85$$

Таким образом, общая сумма выплат после полного погашения кредита будет равна 14,85 млн руб. или 14850000 рублей.

Ответ: 14850000.

6. 15 января планируется взять кредит в банке на 21 месяц. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что на 11-й месяц кредитования нужно выплатить 44,4 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования?

Дано:

S – сумма кредита

$$p = 1\% = \frac{1}{100}$$

$n = 21$ месяц

x – фиксированный платеж

$$c_{11} = 44,4 \text{ тыс. руб.}$$

$$c_1 + \dots + c_{21} = ?$$

Решение:

$$x = \frac{S}{n} \Rightarrow x = \frac{S}{21}$$

Пусть платеж выплачивается 7 числа.

I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	15.01	S	
1	01.02	$1,01S$	
	07.02	$S - x$	$x + 0,01S$
	15.02	$S - x$	

2	01.03	$1,01(S - x)$	
	07.03	$S - 2x$	$x + 0,01(S - x)$
	15.03	$S - 2x$	
3	01.04	$1,01(S - 2x)$	
	07.04	$S - 3x$	$x + 0,01(S - 2x)$
	15.04	$S - 3x$	
	...		
11	01.12	$1,01(S - 10x)$	
	07.12	$S - 11x$	$x + 0,01(S - 10x)$
	15.12	$S - 11x$	
	...		
20	01.09	$1,01(S - 19x)$	
	07.09	$S - 20x$	$x + 0,01(S - 19x)$
	15.09	$S - 20x$	
21	01.10	$1,01(S - 20x)$	
	07.10	0	$x + 0,01(S - 20x)$
	15.10	0	

$$c_{11} = 44,4, c_{11} = x + 0,01(S - 10x) \text{ и } x = \frac{S}{21} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S}{21} + 0,01 \left(S - 10 \cdot \frac{S}{21} \right) = 44,4 \Rightarrow \frac{S}{21} + \frac{S}{100} - \frac{S}{210} = 44,4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{111S}{2100} = \frac{222}{5} \Rightarrow \frac{S}{2100} = \frac{2}{5} \Rightarrow S = 840$$

Таким образом, сумма кредита равно 840 тыс. руб.

Составим выражение (сумму платежей) и упростим:

$$\begin{aligned} c_1 + \dots + c_{21} &= (x + 0,01S) + (x + 0,01(S - x)) + \dots + \\ &+ (x + 0,01(S - 19x)) + 1,01(S - 20x) = 20x + \\ &+ 0,01(20S - x(1 + 2 + \dots + 19)) + 1,01(S - 20x) = \\ &= 20x + 0,01(20S - 190x) + 1,01(S - 20x) = 20x + \frac{1}{5}S - \frac{19}{10}x + \\ &+ \frac{101}{100}S - \frac{101}{5}x = \frac{121}{100}S - \frac{21}{10}x \end{aligned}$$

II. Вычисления

$$S = 840, \text{ тогда } x = \frac{840}{21} = 40 \Rightarrow c_1 + \dots + c_{21} =$$

$$= \frac{121}{100} \cdot 840 - \frac{21}{10} \cdot 40 = 1016,4 - 84 = 932,4.$$

Таким образом, 932,4 тыс. руб. или 932400 рублей нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования.

Ответ: 932400.

7. 15 января планируется взять кредит в банке на сумму 1,8 млн рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму нужно вернуть банку в течение первого года кредитования?

Дано:

$S = 1,8$ млн руб.

$p = 2\% = \frac{1}{50}$

$n = 24$ месяца

x – фиксированный платеж

Решение:

$$x = \frac{S}{n} \Rightarrow x = \frac{1,8}{24} = 0,075$$

Пусть платеж выплачивается 7 числа.

I. Строим модель

$c_1 + \dots + c_{12} = ?$

	Дата	Долг	Платеж
0	15.01	S	
1	01.02	$1,02S$	
	07.02	$S - x$	$x + 0,02S$
	15.02	$S - x$	
2	01.03	$1,02(S - x)$	
	07.03	$S - 2x$	$x + 0,02(S - x)$
	15.03	$S - 2x$	
3	01.04	$1,02(S - 2x)$	
	07.04	$S - 3x$	$x + 0,02(S - 2x)$
	15.04	$S - 3x$	
	...		
12	01.01	$1,02(S - 11x)$	
	07.01	$S - 12x$	$x + 0,02(S - 11x)$
	15.01	$S - 12x$	
	...		

Составим выражение (сумму платежей) и упростим:

$$c_1 + \dots + c_{12} = (x + 0,02S) + (x + 0,02(S - x)) + \dots + \\ + (x + 0,02(S - 11x)) + 12x + 0,02(12S - x(1 + 2 + \dots + 11)) = \\ + 12x + 0,02(12S - 66x) = 12x + \frac{6}{25}S - \frac{33}{25}x = \frac{6}{25}S + \frac{267}{25}x$$

II. Вычисления

$$S = 1,8, x = 0,075 \Rightarrow c_1 + \dots + c_{12} = \frac{6}{25} \cdot \frac{9}{5} + \frac{267}{25} \cdot \frac{3}{40} = \\ = \frac{432}{1000} + \frac{801}{1000} = \frac{933}{500} = 1,233$$

Таким образом, 1,233 млн руб. или 1233000 рублей нужно вернуть банку в течение первого года кредитования.

Ответ: 1233000.

8. 15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму надо вернуть банку за второй год, если за первые 12 месяцев нужно вернуть банку 822 тысячи рублей?

Дано:

S – сумма кредита

$$p = 2\% = \frac{1}{50}$$

$n = 24$ месяца

x – фиксированный платеж

$$c_1 + \dots + c_{12} = 822 \text{ тыс. руб.}$$

$$c_{13} + \dots + c_{24} = ?$$

Решение:

$$x = \frac{S}{n} \Rightarrow x = \frac{S}{24}$$

Пусть платеж выплачивается 7 числа.

I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	15.01	S	
1	01.02	$1,02S$	
	07.02	$S - x$	$x + 0,02S$
	15.02	$S - x$	
2	01.03	$1,02(S - x)$	
	07.03	$S - 2x$	$x + 0,02(S - x)$
	15.03	$S - 2x$	
3	01.04	$1,02(S - 2x)$	
	07.04	$S - 3x$	$x + 0,02(S - 2x)$

	15.04	$S - 3x$	
	...		
12	01.01	$1,02(S - 11x)$	
	07.01	$S - 12x$	$x + 0,02(S - 11x)$
	15.01	$S - 12x$	
13	01.02	$1,02(S - 12x)$	
	07.02	$S - 13x$	$x + 0,02(S - 12x)$
	15.02	$S - 13x$	
	...		
23	01.12	$1,02(S - 22x)$	
	07.12	$S - 23x$	$x + 0,02(S - 22x)$
	15.12	$S - 23x$	
24	01.01	$1,02(S - 23x)$	
	07.01	0	$1,02(S - 23x)$
	15.01	0	

Составим выражения (суммы платежей) и упростим:

$$c_1 + \dots + c_{12} = (x + 0,02S) + (x + 0,02(S - x)) + \dots + (x + 0,02(S - 11x)) = 12x + 0,02(12S - x(1 + \dots + 11)) =$$

$$= 12x + 0,02(12S - 66x) = \frac{6}{25}S + \frac{267}{25}x$$

$$c_{13} + \dots + c_{24} = (x + 0,02(S - 12x)) + \dots + (x + 0,02(S - 22x)) + 1,02(S - 23x) = 11x + 0,02(11S - x(12 + \dots + 22)) +$$

$$+ 1,02(S - 23x) = 11x + 0,02(11S - 187x) + 1,02(S - 23x) =$$

$$= 11x + \frac{11}{50}S - \frac{187}{50}x + \frac{51}{50}S - \frac{1173}{50}x = \frac{31}{25}S - \frac{81}{5}x$$

II. Вычисления

$$c_1 + \dots + c_{12} = 822, x = \frac{S}{24} \Rightarrow \frac{6}{25}S + \frac{267}{25} \cdot \frac{S}{24} = 822 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{411}{600}S = 822 \Rightarrow S = 1200 \Rightarrow c_{13} + \dots + c_{24} = \frac{31}{25} \cdot 1200 -$$

$$- \frac{81}{5} \cdot \frac{1200}{24} = 1488 - 810 = 678$$

Таким образом, 678 тыс. руб. или 678000 рублей нужно вернуть за второй год.

Ответ: 678000.

9. 15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
 - со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
 - 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
- Известно, что в течение второго года кредитования нужно вернуть банку 339 тыс. рублей. Какую сумму нужно выплатить банку в течение первого года кредитования?

Дано:

S – сумма кредита

$$p = 2\% = \frac{1}{50}$$

$n = 24$ месяца

x – фиксированный платеж

$$c_{13} + \dots + c_{24} = 339 \text{ тыс. руб.}$$

$$c_1 + \dots + c_{12} = ?$$

Решение:

$$x = \frac{S}{n} \Rightarrow x = \frac{S}{24}$$

Пусть платеж выплачивается 7 числа.

I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	15.01	S	
1	01.02	$1,02S$	
	07.02	$S - x$	$x + 0,02S$
	15.02	$S - x$	
2	01.03	$1,02(S - x)$	
	07.03	$S - 2x$	$x + 0,02(S - x)$
	15.03	$S - 2x$	
3	01.04	$1,02(S - 2x)$	
	07.04	$S - 3x$	$x + 0,02(S - 2x)$
	15.04	$S - 3x$	
	...		
12	01.01	$1,02(S - 11x)$	
	07.01	$S - 12x$	$x + 0,02(S - 11x)$
	15.01	$S - 12x$	
13	01.02	$1,02(S - 12x)$	
	07.02	$S - 13x$	$x + 0,02(S - 12x)$
	15.02	$S - 13x$	
	...		
23	01.12	$1,02(S - 22x)$	
	07.12	$S - 23x$	$x + 0,02(S - 22x)$
	15.12	$S - 23x$	
24	01.01	$1,02(S - 23x)$	
	07.01	0	$1,02(S - 23x)$

	15.01	0	
--	-------	---	--

Составим выражения (суммы платежей) и упростим:

$$c_1 + \dots + c_{12} = (x + 0,02S) + (x + 0,02(S - x)) + \dots + (x + 0,02(S - 11x)) = 12x + 0,02(12S - x(1 + \dots + 11)) = 12x + 0,02(12S - 66x) = \frac{6}{25}S + \frac{267}{25}x$$

$$c_{13} + \dots + c_{24} = (x + 0,02(S - 12x)) + \dots + (x + 0,02(S - 22x)) + 1,02(S - 23x) = 11x + 0,02(11S - x(12 + \dots + 22)) + 1,02(S - 23x) = 11x + 0,02(11S - 187x) + 1,02(S - 23x) = 11x + \frac{11}{50}S - \frac{187}{50}x + \frac{51}{50}S - \frac{1173}{50}x = \frac{31}{25}S - \frac{81}{5}x$$

II. Вычисления

$$c_{13} + \dots + c_{24} = 339, x = \frac{S}{24} \Rightarrow \frac{31}{25}S - \frac{81}{5} \cdot \frac{S}{24} = 339 \Rightarrow \Rightarrow \frac{339}{600}S = 339 \Rightarrow S = 600 \Rightarrow c_1 + \dots + c_{12} = \frac{6}{25} \cdot 600 + \frac{267}{25} \cdot \frac{600}{24} = 144 + 267 = 411$$

Таким образом, 411 тыс. руб. или 411000 рублей нужно выплатить банку в течение первого года кредитования.

Ответ: 411000.

10. Клиент банка планирует взять 15-го августа кредит на 17 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на 9%, чем сумма, взятая в кредит. Найдите r .

Дано:

S – сумма кредита

$$p = r\% = \frac{r}{100}$$

$n = 17$ месяцев

$S - 100\%$

$$\frac{c_1 + \dots + c_{17} - 109\%}{S} = 1,09$$

x – фиксированный платеж

$r = ?$

Решение:

$$x = \frac{S}{n} \Rightarrow x = \frac{S}{17}$$

Пусть $1 + \frac{r}{100} = k, k > 1 \dots (*)$, т.е. $\frac{r}{100} = k - 1$

Пусть платежи выплачиваются 7 числа

I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	15.08	S	
1	01.09	kS	
	07.09	$S - x$	$x + (k - 1)S$
	15.09	$S - x$	
2	01.10	$k(S - x)$	
	07.10	$S - 2x$	$x + (k - 1)(S - x)$
	15.10	$S - 2x$	
3	01.11	$k(S - 2x)$	
	07.11	$S - 3x$	$x + (k - 1)(S - 2x)$
	15.11	$S - 3x$	
	...		
16	01.02	$k(S - 15x)$	
	07.02	$S - 16x$	$x + (k - 1)(S - 15x)$
	15.02	$S - 16x$	
17	01.03	$k(S - 16x)$	
	07.03	0	$k(S - 16x)$
	15.03	0	

Т.к. общая сумма выплат после полного погашения кредита на 9% больше суммы взятой в кредит, то составим уравнение:

$$\frac{c_1 + \dots + c_{17}}{S} = 1,09 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x + (k - 1)S) + \dots + (x + (k - 1)(S - 15x)) + k(S - 16x)}{S} = 1,09 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 16x + (k - 1)(16S - x(1 + \dots + 15)) + \\ + k(S - 16x) = 1,09S \Rightarrow 16x + (k - 1)(16S - 120x) + kS - \\ - 16kx = 1,09S \Rightarrow 16x + 16kS - 120kx - 16S + 120x + kS - \\ - 16kx = 1,09S \Rightarrow 136x + k(17S - 136x) - 17,09S = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow k = \frac{17,09S - 136x}{17S - 136x} \end{aligned}$$

II. Вычисления

Т.к. $x = \frac{S}{17}$; $k = 1 + \frac{r}{100}$, то:

$$1 + \frac{r}{100} = \frac{17,09S - 136 \cdot \frac{S}{17}}{17S - 136 \cdot \frac{S}{17}} \Rightarrow 1 + \frac{r}{100} = \frac{9,09}{9} \Rightarrow \frac{r}{100} = \frac{0,09}{9} \Rightarrow r = 1.$$

Таким образом, долг возрастал на 1%.

Ответ: 1.

11. 15 января планируется взять кредит в банке на некоторый срок (целое число месяцев). Условия его возврата таковы:

- 1-го числа n -го месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число n -го месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа n -го месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

На сколько месяцев планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 20% больше суммы, взятой в кредит?

Дано:

S – сумма кредита

$$p = 1\% = \frac{1}{100}$$

n – количество месяцев

S – 100%

$$c_1 + \dots + c_n = 120\%$$

$$\frac{c_1 + \dots + c_n}{S} = 1,2$$

x – фиксированный платеж

n – ?

Решение:

$$x = \frac{S}{n}$$

Пусть платежи выплачиваются 7 числа

I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	15.01	S	
1	01.02	$1,01S$	
	07.02	$S - x$	$x + 0,01S$
	15.02	$S - x$	
2	01.03	$1,01(S - x)$	
	07.03	$S - 2x$	$x + 0,01(S - x)$
	15.03	$S - 2x$	
3	01.04	$1,01(S - 2x)$	
	07.04	$S - 3x$	$x + 0,01(S - 2x)$
	15.04	$S - 3x$	
	...		
$n - 1$	01.02	$1,01(S - (n - 2)x)$	

		07.02	$S - (n - 1)x$	$x + 0,01(S - (n - 2)x)$
		15.02	$S - (n - 1)x$	
	n	01.03	$1,01(S - (n - 1)x)$	
		07.03	0	$1,01(S - (n - 1)x)$
		15.03	0	

Т.к. общая сумма выплат после полного погашения кредита на 20% больше суммы, взятой в кредит, то составим уравнение:

$$\begin{aligned}
 \frac{c_1 + \dots + c_n}{S} &= 1,2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{(x + 0,01S) + \dots + (x + 0,01(S - (n - 2)x)) + 1,01(S - (n - 1)x)}{S} &= 1,2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow (n - 1)x + 0,01((n - 1)S - x(1 + \dots + (n - 2))) + & \\
 + 1,01(S - (n - 1)x) = 1,2S \Rightarrow (n - 1)x + & \\
 + 0,01\left((n - 1)S - x \cdot \frac{n-1}{2} \cdot (n - 2)\right) + 1,01(S - (n - 1)x) = & \\
 = 1,2S \Rightarrow nx - x + 0,01nS - 0,01S - \frac{0,01x(n-1)(n-2)}{2} + & \\
 + 1,01S - 1,01nx + 1,01x = 1,2S \Rightarrow 0,01nS - \frac{0,01x(n-1)(n-2)}{2} - & \\
 - 0,01nx + 0,01x - 0,2S = 0 \Rightarrow 0,02nS - 0,01xn^2 + 0,03xn - & \\
 - 0,02x - 0,02nx + 0,02x - 0,4S = 0 \Rightarrow 0,02nS - 0,01xn^2 + & \\
 + 0,01xn - 0,4S = 0 \Rightarrow 2nS - xn^2 + xn - 40S = 0 &
 \end{aligned}$$

II. Вычисления

Т.к. $x = \frac{S}{n}$, то:

$$\begin{aligned}
 2nS - xn^2 + xn - 40S = 0 \Rightarrow 2nS - \frac{n^2S}{n} + \frac{S}{n}n - 40S &= 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow 2nS - nS + S - 40S = 0 \Rightarrow nS - 39S = 0 \Rightarrow n - 39 &= 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow n = 39 &
 \end{aligned}$$

Таким образом, на 39 месяцев планируется взять кредит.

Ответ: 39.

12. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 5 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 7,5 млн рублей?

Дано:
 $S = 5$ млн руб.
 $p = 20\% = \frac{1}{5}$
 n – количество лет
 $c_1 + \dots + c_n = 7,5$ млн руб.
 x – фиксированный платеж
 $n - ?$

Решение:
 $x = \frac{S}{n} \Rightarrow x = \frac{5}{n}$
 Пусть платежи выплачиваются в марте
 I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	июль	S	
1	январь	$1,2S$	
	март	$S - x$	$x + 0,2S$
	июль	$S - x$	
2	январь	$1,2(S - x)$	
	март	$S - 2x$	$x + 0,2(S - x)$
	июль	$S - 2x$	
3	январь	$1,2(S - 2x)$	
	март	$S - 3x$	$x + 0,2(S - 2x)$
	июль	$S - 3x$	
	...		
$n - 1$	январь	$1,2(S - (n - 2)x)$	
	март	$S - (n - 1)x$	$x + 0,2(S - (n - 2)x)$
	июль	$S - (n - 1)x$	
n	январь	$1,2(S - (n - 1)x)$	
	март	0	$1,2(S - (n - 1)x)$
	июль	0	

Т.к что общая сумма выплат после его полного погашения составит 38 млн рублей, то составим уравнение:

$$\begin{aligned}
c_1 + \dots + c_n &= 7,5 \Rightarrow (x + 0,2S) + \dots + (x + 0,2(S - (n-2)x)) + \\
&+ 1,2(S - (n-1)x) = 7,5 \Rightarrow (n-1)x + 0,2((n-1)S - x(1 + \\
&+ \dots + (n-2))) + 1,2(S - (n-1)x) = 7,5 \Rightarrow (n-1)x + \\
&+ 0,2\left((n-1)S - x \cdot \frac{n-1}{2} \cdot (n-2)\right) + 1,2(S - (n-1)x) = 7,5 \Rightarrow \\
&\Rightarrow nx - x + 0,2nS - 0,2S - \frac{0,2x(n-1)(n-2)}{2} + 1,2S - 1,2nx + 1,2x = \\
&= 7,5 \Rightarrow 0,2nS - \frac{0,2x(n-1)(n-2)}{2} - 0,2nx + 0,2x + S = 7,5 \Rightarrow \\
&\Rightarrow 0,4nS - 0,2xn^2 + 0,6xn - 0,4x - 0,4nx + 0,4x + 2S = 15 \Rightarrow \\
&\Rightarrow 0,4nS - 0,2xn^2 + 0,2xn + 2S = 15 \Rightarrow 2nS - xn^2 + xn + \\
&+ 10S = 75
\end{aligned}$$

II. Вычисления

Т.к. $x = \frac{5}{n}$; $S = 5$, то:

$$\begin{aligned}
2nS - xn^2 + xn + 10S &= 75 \Rightarrow 2n \cdot 5 - \frac{n^2 \cdot 5}{n} + \frac{5}{n}n + 10 \cdot 5 = \\
&= 75 \Rightarrow 2n \cdot 5 - n \cdot 5 + 5 + 10 \cdot 5 = 75 \Rightarrow n + 11 = 15 \Rightarrow \\
&\Rightarrow n = 4
\end{aligned}$$

Таким образом, на 4 года планируется взять кредит.

Ответ: 4.

13. 15-го декабря планируется взять кредит на 1200 тысяч рублей на $(n+1)$ месяц. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по n -й долг должен быть на 80 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа n -го месяца долг составит 400 тысяч рублей;
- к 15-му числу $(n+1)$ -го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите r , если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1288 тысяч рублей.

Дано:

$S = 1200$ тыс. руб.

$$p = r\% = \frac{r}{100}$$

$n + 1$ — количество месяцев

15 числа n -го мес. долг = 400 тыс. руб.

$$c_1 + \dots + c_{n+1} = 1288 \text{ тыс. руб.}$$

$x = 80$ тыс. руб.

$r = ?$

Решение:

Пусть $1 + \frac{r}{100} = k, k > 1 \dots (*)$, $\frac{r}{100} = k - 1$

Пусть платежи выплачиваются 7 числа

I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	15.12	S	
1	01.01	kS	
	07.01	$S - x$	$x + (k - 1)S$
	15.01	$S - x$	
2	01.02	$k(S - x)$	
	07.02	$S - 2x$	$x + (k - 1)(S - x)$
	15.02	$S - 2x$	
3	01.03	$k(S - 2x)$	
	07.03	$S - 3x$	$x + (k - 1)(S - 2x)$
	15.03	$S - 3x$	
	...		
n	01	$k(S - (n - 1)x)$	
	07	$S - nx$	$x + (k - 1)(S - (n - 1)x)$
	15	$S - nx = 400$	
$n + 1$	01	$400k$	
	07	0	$400k$
	15	0	

$$\text{Т.к. } S = 1200, x = 80, S - nx = 400 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1200 - 80n = 400 \Rightarrow n = 10$$

Тогда последние два месяца в таблице будут выглядеть следующим образом:

10	01.10	$k(S - 9x)$	
	07.10	$S - 10x$	$x + (k - 1)(S - 9x)$
	15.10	400	
11	01.11	$400k$	
	07.11	0	$400k$
	15.11	0	

Составим выражение и упростим:

$$c_1 + \dots + c_{11} = (x + (k - 1)S) + \dots + (x + (k - 1)(S - 9x)) + 400k = 10x + (k - 1)(10S - x(1 + \dots + 9)) + 400k = 10x + (k - 1)(10S - 45x) + 400k = 10x + 10kS - 10S - 45kx + 45x + 400k = 55x + k(10S - 45x + 400) - 10S$$

II. Вычисления

Т.к. $S = 1200, x = 80$ и $c_1 + \dots + c_{11} = 1288$, то

$$55 \cdot 80 + k(10 \cdot 1200 - 45 \cdot 80 + 400) - 10 \cdot 1200 = 1288 \Rightarrow \Rightarrow 8800k = 8888 \Rightarrow k = 1,01$$

Т.к. $k = 1 + \frac{r}{100}$, то $1 + \frac{r}{100} = 1,01 \Rightarrow \frac{r}{100} = \frac{1}{100} \Rightarrow r = 1$

Таким образом, долг увеличивался на 1%.

Ответ: 1.

14. 15-го декабря планируется взять кредит в банке на сумму 1000000 рублей на 11 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 10-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

- к 15-му числу 11-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какой долг будет 15-го числа 10-го месяца, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1231 тысячи рублей?

Дано:

$S = 1000$ тыс. руб.

$p = 3\% = \frac{3}{100}$

$n = 11$ месяцев

$c_1 + \dots + c_{11} = 1231$ тыс. руб.

x – фиксированный платеж

Решение:

Пусть платежи выплачиваются 7 числа

I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	15.12	S	
1	01.01	$1,03S$	
	07.01	$S - x$	$x + 0,03S$
	15.01	$S - x$	

долг 15.10 – ?	2	01.02	$1,03(S - x)$	
		07.02	$S - 2x$	$x + 0,03(S - x)$
		15.02	$S - 2x$	
	3	01.03	$1,03(S - 2x)$	
		07.03	$S - 3x$	$x + 0,03(S - 2x)$
		15.03	$S - 3x$	
		...		
	10	01.10	$1,03(S - 9x)$	
		07.10	$S - 10x$	$x + 0,03(S - 9x)$
		15.10	$S - 10x$	
	11	01.11	$1,03(S - 10x)$	
		07.11	0	$1,03(S - 10x)$
		15.11	0	

Составим выражение и упростим:

$$\begin{aligned}
 c_1 + \dots + c_{11} &= (x + 0,03S) + \dots + (x + 0,03(S - 9x)) + \\
 &+ (1,03(S - 10x)) = 10x + 0,03(10S - x(1 + \dots + 9)) + \\
 &+ (1,03(S - 10x)) = 10x + 0,03(10S - 45x) + (1,03(S - 10x)) = \\
 &= 10x + 0,3S - 1,35x + 1,03S - 10,3x = 1,33S - 1,65x
 \end{aligned}$$

II. Вычисления

Т.к. $c_1 + \dots + c_{11} = 1231, S = 1000$, то

$$1,33 \cdot 1000 - 1,65x = 1231 \Rightarrow x = 60$$

Долг 15.10 из таблицы находим по формуле $S - 10x$.

Т.к. $S = 1000, x = 60$, то $S - 10x = 1000 - 10 \cdot 60 = 400$.

Таким образом, 15-го числа 10-го месяца долг составит 400 тыс. руб. или 400000 рублей.

Ответ: 400000.

15. 15-го декабря планируется взять кредит в банке на 26 месяцев.

Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 25-й долг должен быть на 20 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

- к 15-му числу 26-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какой долг будет 15-го числа 25-го месяца, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1407 тысячи рублей?

Дано:

S – сумма кредита

$$p = 3\% = \frac{3}{100}$$

$n = 26$ месяцев

$$c_1 + \dots + c_{26} = 1407 \text{ тыс. руб.}$$

$$x = 20 \text{ тыс. руб.}$$

$$\text{долг 15.01} - ?$$

Решение:

Пусть платежи выплачиваются 7 числа

I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	15.12	S	
1	01.01	$1,03S$	
	07.01	$S - x$	$x + 0,03S$
	15.01	$S - x$	
2	01.02	$1,03(S - x)$	
	07.02	$S - 2x$	$x + 0,03(S - x)$
	15.02	$S - 2x$	
3	01.03	$1,03(S - 2x)$	
	07.03	$S - 3x$	$x + 0,03(S - 2x)$
	15.03	$S - 3x$	
	...		
25	01.01	$1,03(S - 24x)$	
	07.01	$S - 25x$	$x + 0,03(S - 24x)$
	15.01	$S - 25x$	
26	01.02	$1,03(S - 25x)$	
	07.02	0	$1,03(S - 25x)$
	15.02	0	

Составим выражение и упростим:

$$\begin{aligned} c_1 + \dots + c_{26} &= (x + 0,03S) + \dots + (x + 0,03(S - 24x)) + \\ &+ (1,03(S - 25x)) = 25x + 0,03(25S - x(1 + \dots + 24)) + \\ &+ (1,03(S - 25x)) = 25x + 0,03(25S - 300x) + \\ &+ (1,03(S - 25x)) = 25x + 0,75S - 9x + 1,03S - 25,75x = \\ &= 1,78S - 9,75x \end{aligned}$$

II. Вычисления

Т.к. $c_1 + \dots + c_{26} = 1407$, $x = 20$, то

$$1,78 \cdot S - 9,75 \cdot 20 = 1407 \Rightarrow S = 900$$

Долг 15.01 из таблицы находим по формуле $S - 25x$.

Т.к. $S = 900, x = 20$, то $S - 25x = 900 - 25 \cdot 20 = 400$.

Таким образом, 15-го числа 25-го месяца долг составит 400 тыс. руб. или 400000 рублей.

Ответ: 400000.

16. 15-го мая планируется взять кредит в банке на 17 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 16-й долг должен быть на 50 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15-му числу 17-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1472 тысячи рублей?

Дано:

S – сумма кредита

$$p = 2\% = \frac{1}{50}$$

$n = 17$ месяцев

$$c_1 + \dots + c_{17} = 1472$$

тыс. руб.

$$x = 50 \text{ тыс. руб.}$$

$S = ?$

Решение:

Пусть платежи выплачиваются 7 числа

I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	15.05	S	
1	01.06	$1,02S$	
	07.06	$S - x$	$x + 0,02S$
	15.06	$S - x$	
2	01.07	$1,02(S - x)$	
	07.07	$S - 2x$	$x + 0,02(S - x)$
	15.07	$S - 2x$	
3	01.08	$1,02(S - 2x)$	
	07.08	$S - 3x$	$x + 0,02(S - 2x)$
	15.08	$S - 3x$	
	...		
16	01.09	$1,02(S - 15x)$	
	07.09	$S - 16x$	$x + 0,02(S - 15x)$
	15.09	$S - 16x$	
17	01.10	$1,02(S - 16x)$	

	07.10	0	$1,02(S - 16x)$
	15.10	0	

Составим выражение и упростим:

$$\begin{aligned}
 c_1 + \dots + c_{17} &= (x + 0,02S) + \dots + (x + 0,02(S - 15x)) + \\
 &+ (1,02(S - 16x)) = 16x + 0,02(16S - x(1 + \dots + 15)) + \\
 &+ (1,02(S - 16x)) = 16x + 0,02(16S - 120x) + \\
 &+ (1,02(S - 16x)) = 16x + 0,32S - 2,4x + 1,02S - 16,32x = \\
 &= 1,34S - 2,72x
 \end{aligned}$$

II. Вычисления

Т.к. $c_1 + \dots + c_{17} = 1472$, $x = 50$, то

$$1,34 \cdot S - 2,72 \cdot 50 = 1472 \Rightarrow S = 1200$$

Таким образом, 1200 тыс. руб. или 1200000 рублей планируется взять в кредит.

Ответ: 1200000.

17. 15-го июля планируется взять кредит в банке на сумму 1400 тысяч рублей на 31 месяц. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 30-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа 30-го месяца долг составит 500 тысяч рублей;
- к 15-му числу 31-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите r , если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1989 тысяч рублей.

Дано:

$S = 1400$ тыс. руб.

$p = r\% = \frac{r}{100}$

$n = 31$ месяц

$c_1 + \dots + c_{31} =$

$= 1989$ тыс. руб.

15.01 долг $= 500$ тыс. руб.

x – фиксированный платеж

$r = ?$

Решение:

Пусть $1 + \frac{r}{100} = k, k > 1 \dots (*)$, $\frac{r}{100} = k - 1$

Пусть платежи выплачиваются 7 числа

I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	15.07	S	
1	01.08	kS	
	07.08	$S - x$	$x + (k - 1)S$
	15.08	$S - x$	
2	01.09	$k(S - x)$	
	07.09	$S - 2x$	$x + (k - 1)(S - x)$
	15.09	$S - 2x$	
3	01.10	$k(S - 2x)$	
	07.10	$S - 3x$	$x + (k - 1)(S - 2x)$
	15.10	$S - 3x$	
	...		
30	01.01	$k(S - 29x)$	
	07.01	$S - 30x$	$x + (k - 1)(S - 29x)$
	15.01	$S - 30x = 500$	
31	01.02	$500k$	
	07.02	0	$500k$
	15.02	0	

Составим выражение и упростим:

$$c_1 + \dots + c_{31} = (x + (k - 1)S) + \dots + (x + (k - 1)(S - 29x)) + 500k = 30x + (k - 1)(30S - x(1 + \dots + 29)) + 500k = 30x + (k - 1)(30S - 435x) + 500k = 30x + 30kS - 30S - 435kx + 435x + 500k = 465x - 30S + k(30S - 435x + 500)$$

II. Вычисления

Т.к. $S - 30x = 500$ и $S = 1400$, то $1400 - 30x = 500 \Rightarrow x = 30$

Т.к. $c_1 + \dots + c_{31} = 1989, S = 1400, x = 30$, то $465 \cdot 30 -$

$- 30 \cdot 1400 + k(30 \cdot 1400 - 435 \cdot 30 + 500) = 1989 \Rightarrow$

$\Rightarrow 29450k = 30039 \Rightarrow k = 1,02$

Т.к. $k = 1 + \frac{r}{100}$ и $k = 1,02$, то $1 + \frac{r}{100} = 1,02 \Rightarrow r = 2$

Таким образом, долг увеличился на 2%.

Ответ: 2.

Вклады

1. Вклад в размере 6 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а кроме этого, в начале третьего и четвертого годов вклад пополняется на одну и ту же фиксированную сумму, равную целому числу миллионов рублей. Найдите наименьший возможный размер такой суммы, при котором через четыре года вклад станет не меньше 15 млн рублей.

Дано:

$S = 6$ млн руб.

$p = 10\% = \frac{1}{10}$

$n = 4$ года

x – фикс. вклад, $x \in \mathbb{Z}$
млн руб.

$S_4 \geq 15$ млн руб.

$x_{\min} = ?$

Решение:

Пусть вклад открыли в январе, увеличивается в декабре, пополняется в феврале

I. Строим модель

	Дата	Размер вклада	Пополнение
1	январь	S	
	декабрь	$1,1S$	
2	декабрь	$1,1^2S$	
3	февраль	$1,1^2S + x$	x
	декабрь	$1,1^3S + 1,1x$	
4	февраль	$1,1^3S + 1,1x + x$	x
	декабрь	$1,1^4S + 1,1^2x + 1,1x$	

Т.к. котором через четыре года вклад должен быть не меньше 15 млн рублей, то составим неравенство:

$$1,1^4S + 1,1^2x + 1,1x \geq 15$$

II. Вычисления

$$1,1^4S + 1,1^2x + 1,1x \geq 15 \Rightarrow 1,1^4S + 2,31x \geq 15 \Rightarrow x \geq \frac{15 - 1,1^4S}{2,31}$$

$$\text{Т.к. } S = 6, \text{ то } x \geq \frac{15 - 1,1^4 \cdot 6}{2,31} \Rightarrow x \geq \frac{6,2154}{2,31} \Rightarrow x \geq 2 \frac{2659}{3850} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{\min} = 3$$

Таким образом, в начале третьего и четвертого годов вклад надо пополнить на 3 млн рублей.

Ответ: 3.

2. По вкладу «А» банк в конце года планирует увеличивать на 17% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» - увеличивать эту сумму на 9% в первый год и на целое число n

процентов за второй год. Найдите наименьшее значение n , при котором за два года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

Дано:

S – перв. взнос

$$p_A = 17\% = \frac{17}{100}$$

$$p_{B1} = 9\% = \frac{9}{100}$$

$$p_{B2} = n\% = \frac{n}{100}, n \in \mathbb{Z}$$

$k = 2$ года

Вклад Б выгоднее вклада А

$n_{\min} = ?$

Решение:

I. Строим модель для вклада «А»

Год	Размер вклада
1	S
	$1,17S$
2	$1,17^2 S$

Строим модель для вклада «Б»

Год	Размер вклада
1	S
	$1,09S$
2	$1,09 \cdot \left(1 + \frac{n}{100}\right) S$

Т.к. за два года хранения вклад «Б» должен оказаться выгоднее вклада «А», то составим неравенство:

$$1,09 \cdot \left(1 + \frac{n}{100}\right) S > 1,17^2 S$$

II. Вычисления

$$1,09 \cdot \left(1 + \frac{n}{100}\right) S > 1,17^2 S \Rightarrow \frac{109}{100} + \frac{109n}{10000} > 1,17 \cdot 1,17 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10900 + 109n > 13689 \Rightarrow 109n > 2789 \Rightarrow n > 25 \frac{64}{109} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_{\min} = 26$$

Таким образом, по вкладу «Б» во второй год банк должен увеличить сумму на 26%.

Ответ: 26.

Задачи на оптимальный выбор

1. Алексей приобрел ценную бумагу за 8 тыс. рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 1 тыс. рублей. В любой момент Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счет. Каждый год сумма на счете будет увеличиваться на 8%. В течение какого года после покупки Алексей должен

продать ценную бумагу, чтобы через двадцать пять лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счете была наибольшей?

Дано:

$$S = 8 \text{ тыс. руб.}$$

$$p = 8\% = \frac{2}{25}$$

n – количество лет

$$x = 1 \text{ тыс. руб.}$$

Решение:

I. Строим модель

Год	Цена бумаги	Сумма на счете
0	S	
1	$S + x$	$1,08S$
2	$S + 2x$	$1,08(S + x)$
3	$S + 3x$	$1,08(S + 2x)$
	...	
n	$S + nx$	$1,08(S + (n - 1)x)$

$$n_{\min} = ?$$

Т.к. сумма на банковском счете будет наибольшей, если продать бумагу в течение того года, когда сумма на счете превысит цену бумаги, то составим неравенство:

$$1,08(S + (n - 1)x) > S + nx$$

II. Вычисления

$$1,08(S + (n - 1)x) > S + nx \Rightarrow 1,08S + 1,08nx - 1,08x - S - nx > 0 \Rightarrow 0,08S + 0,08nx - 1,08x > 0 \Rightarrow n > \frac{1,08x - 0,08S}{0,08x}$$

$$\text{Т.к. } x = 1, S = 8, \text{ то } n > \frac{1,08 \cdot 1 - 0,08 \cdot 8}{0,08 \cdot 1} \Rightarrow n > \frac{0,44}{0,08} \Rightarrow n > 5,5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_{\min} = 6$$

Таким образом, в течение 6 года после покупки следует продать ценную бумагу.

Ответ: 6.

2. В начале 2001 года Алексей приобрел ценную бумагу за 19000 рублей. В конце каждого года цена бумаги возрастает на 3000 рублей. В начале любого года Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счет. Каждый год сумма на счете будет увеличиваться на 10%. В начале какого года Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через пятнадцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счете была наибольшей?

Дано:

$$S = 19000 \text{ руб.}$$

$$p = 10\% = \frac{1}{10}$$

n – количество лет

$$x = 3000 \text{ руб.}$$

Решение:

I. Строим модель

	Год	Цена бумаги	Сумма на счете
1	2001	S	
		$S + x$	$1,1S$
2	2002	$S + 2x$	$1,1(S + x)$
3	2003	$S + 3x$	$1,1(S + 2x)$
		...	
n	?	$S + nx$	$1,1(S + (n - 1)x)$

Год – ?

Т.к. сумма на банковском счете будет наибольшей, если продать бумагу в начале того года, когда сумма на счете превысит цену бумаги, то составим неравенство:

$$1,1(S + (n - 1)x) > S + nx$$

II. Вычисления

$$1,1(S + (n - 1)x) > S + nx \Rightarrow 1,1S + 1,1nx - 1,1x - S - nx > 0 \Rightarrow 0,1S + 0,1nx - 1,1x > 0 \Rightarrow n > \frac{1,1x - 0,1S}{0,1x}$$

$$\text{Т.к. } x = 3000, S = 19000, \text{ то } n > \frac{1,1 \cdot 3000 - 0,1 \cdot 19000}{0,1 \cdot 3000} \Rightarrow n > \frac{1400}{300} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n > 4\frac{2}{3} \Rightarrow n_{\min} = 5 \Rightarrow \text{в начале 2005 года следует продать ценную бумагу.}$$

Ответ: 2005.

3. Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят $10t$ тыс. рублей в конце года t ($t = 1; 2; 3; \dots$). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счет в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счете будет увеличиваться в $1 + r$ раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счете была наибольшей. Расчеты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце одиннадцатого года. При каких положительных значениях r это возможно?

I. Строим модель

В случае продажи пенсионным фондом ценных бумаг в конце года t в конце 25-го года на его счёте будет: $S = 10t(1+r)^{25-t}$ тыс. руб.
 $S = S(t)$.

Найдем производную функции $S(t)$, $(1+r)$ считаем числом:

$$S'(t) = 10(1+r)^{25-t} + 10t(1+r)^{25-t} \cdot \ln(1+r) \cdot (-1) = \\ = 10(1+r)^{25-t}(1 - t \cdot \ln(1+r))$$

$$S'(t) = 0 \Rightarrow 10(1+r)^{25-t}(1 - t \cdot \ln(1+r)) = 0$$

$10 \neq 0$, $(1+r)^{25-t} \neq 0$ по свойству функции, тогда

$$1 - t \cdot \ln(1+r) = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{\ln(1+r)}$$

Если $t < \frac{1}{\ln(1+r)}$, то $-t \ln(1+r) > -1 \Rightarrow 1 - t \ln(1+r) > 0$.

Если $t > \frac{1}{\ln(1+r)}$, то $-t \ln(1+r) < -1 \Rightarrow 1 - t \ln(1+r) < 0$.

Таким образом $t = \frac{1}{\ln(1+r)}$ – точка максимума.

По условию задачи продавать бумаги следует в конце 11-го года, тогда доход, полученный при продаже бумаг в конце 11-го года, больше, чем при их продаже в конце 10-го и 12-го года. Согласно монотонности функции, $S(t)$: $S(11) > S(10)$ и $S(11) > S(12)$, что гарантирует выполнение условия $S(11) > S(t)$ для всех t , отличных от 11. Необходимо и достаточно решить систему неравенств:

$$\begin{cases} S(11) > S(10) \\ S(11) > S(12) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10 \cdot 11(1+r)^{25-11} > 10 \cdot 10(1+r)^{25-10} \\ 10 \cdot 11(1+r)^{25-11} > 10 \cdot 12(1+r)^{25-12} \end{cases}$$

II. Вычисления

$$\begin{cases} 10 \cdot 11(1+r)^{25-11} > 10 \cdot 10(1+r)^{25-10} \\ 10 \cdot 11(1+r)^{25-11} > 10 \cdot 12(1+r)^{25-12} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 11(1+r)^{14} > 10(1+r)^{15} \\ 11(1+r)^{14} > 12(1+r)^{13} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{11}{10} > 1+r \\ 1+r > \frac{12}{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r < \frac{1}{10} \\ r > \frac{1}{11} \end{cases} \Rightarrow r \in \left(\frac{1}{11}; \frac{1}{10}\right)$$

Ответ: $r \in \left(\frac{1}{11}; \frac{1}{10}\right)$.

4. Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят $10t$ тыс. рублей в конце года t ($t = 1; 2; \dots$). В конце любого года можно продать ценные бумаги и положить деньги на счет в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счете будет увеличиваться на 24%. В конце какого года пенсионному фонду следует продать ценные бумаги, чтобы в конце двадцатого года сумма на его счете была наибольшей?

I. Строим модель

Т.к. $10t$ тыс. руб. – стоимость ценных бумаг в конце года t , то в следующем году $(t + 1)$ – стоимость ценных бумаг составит $10(t + 1)$ тыс. руб., тогда прибыль конца последующего года по сравнению с концом предыдущего будет равна $10(t + 1) - 10t$. Найдем эту прибыль в процентах и введем функцию:

$$f = \frac{10(t + 1) - 10t}{10t} \cdot 100\%$$

По свойству пропорции $f = \frac{10(t+1)-10t}{10t} \cdot 100\%$.

Для исследования упростим функцию:

$$f = \frac{10(t+1)-10t}{10t} \cdot 100\% \Rightarrow \frac{1}{t} \cdot 100\%.$$

Найдем производную:

$$f' = -\frac{1}{t^2} \cdot 100\%$$

$$f' = 0 \Rightarrow -\frac{1}{t^2} \cdot 100\% = 0 \Rightarrow -\frac{1}{t^2} = 0 \Rightarrow t \in \emptyset$$

По условию задачи $t \geq 1$, проверим знак производной на этом промежутке (возьмем $t = 2$):

$f'(2) = -\frac{1}{2^2} \cdot 100\% = -25$, тогда функция является убывающей, поэтому прибыль в процентах в ценных бумагах с каждым годом становится меньше.

Определим, когда прибыль в ценных бумагах станет меньше 24%, для этого составим неравенство:

$$\frac{1}{t} \cdot 100\% < 24\%$$

II. Вычисления

$$\frac{1}{t} \cdot 100\% < 24\% \Rightarrow \frac{1}{t} < \frac{6}{25} \Rightarrow \frac{25-6t}{25t} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t < 0 - \text{не удов. усл. задачи} \\ t > \frac{25}{6} \end{array} \right. \Rightarrow t > \frac{25}{6} \Rightarrow t > 4\frac{1}{6}, \quad \text{значит}$$

акции надо продать в конце 5-го года.

Ответ: 5.

5. Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3t$ единиц товара, а, если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно y^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $5y$ единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 рублей. Григорий готов выделять 6800000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

И. Строим модель

Григорий готов заплатить за $t = \frac{6800000}{500} = 13600$ часов работы.

Пусть x^2 часов рабочие трудятся на заводе, расположенном в первом городе, где $x^2 \in [0; 13600]$; $0 \leq x \leq 20\sqrt{34}$, y^2 часов – во втором городе, $y^2 \in [0; 13600]$; $0 \leq y \leq 20\sqrt{34}$.

Тогда общее время работы на двух заводах будет равно:

$$x^2 + y^2 = 13600.$$

При этом на заводе, расположенном в первом городе, производят $3x$ единиц товара, во втором – $5y$ единиц товара.

Пусть z – общее количество единиц произведенного товара.

Завод	Производительность	z	Время		Оплата за час	Оплата за неделю
1	$3x$		x^2	13600	500	6800000
2	$5y$		y^2		500	

Используя полученную таблицу, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x + 5y = z \\ x^2 + y^2 = 13600 \end{cases}$$

II. Вычисления

$$\begin{cases} 3x + 5y = z \\ x^2 + y^2 = 13600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 3x + 5y \\ y = \sqrt{13600 - x^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = 3x + 5\sqrt{13600 - x^2}$$

Требуется найти $z_{\text{наиб}}$ при $x \in [0; 20\sqrt{34}]$

Найдем производную функции z :

$$\begin{aligned} z' &= 3 + 5 \cdot \frac{1}{2} (13600 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = 3 - \frac{5x}{\sqrt{13600 - x^2}} = \\ &= \frac{3\sqrt{13600 - x^2} - 5x}{\sqrt{13600 - x^2}} \end{aligned}$$

$$z' = 0 \Rightarrow \frac{3\sqrt{13600 - x^2} - 5x}{\sqrt{13600 - x^2}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 60 \\ x \neq \pm 20\sqrt{34} \end{cases}$$

По условию задачи $x \neq -60$. Проверим значение производной на промежутках $0 \leq x < 60$; $60 < x \leq 20\sqrt{34}$.

Если $0 \leq x < 60$, то $z' > 0$, если $60 < x \leq 20\sqrt{34}$, то $z' < 0$, тогда $x = 60$ – точка максимума, значит:

$$z_{\text{наиб}} = z(60) = 3 \cdot 60 + 5\sqrt{13600 - 60^2} = 680.$$

Таким образом, наибольшее количество товаров – 680.

Ответ: 680.

6. Вадим является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Вадим платит рабочему 200 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, – 300 рублей. Вадим готов выделять 1200000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

I. Строим модель

Пусть x^2 часов рабочие трудятся на заводе, расположенном в первом городе, тогда оплата труда суммарно составит $200x^2$ рублей, y^2 часов – во втором городе, тогда оплата труда суммарно составит $300y^2$ рублей.

Тогда общая оплата труда с двух заводов составит:

$$200x^2 + 300y^2 = 1200000.$$

При этом на заводе, расположенном в первом городе, производят x единиц товара, во втором – y единиц товара.

Пусть z – общее количество единиц произведенного товара.

Завод	Производительность		Время	Оплата за час	Оплата за неделю
1	x	z	x^2	200	1200000
2	y		y^2	300	

Используя полученную таблицу, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = z \\ 200x^2 + 300y^2 = 1200000 \end{cases}$$

II. Вычисления

$$\begin{cases} x + y = z \\ 200x^2 + 300y^2 = 1200000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = x + y \\ y = \sqrt{\frac{1200000 - 200x^2}{300}} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = x + \sqrt{\frac{1200000 - 200x^2}{300}}$$

Требуется найти $z_{\text{наиб}}$.

Найдем производную функции z :

$$\begin{aligned} z' &= 1 + \frac{1}{10\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} (1200000 - 200x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-400x) = \\ &= 1 - \frac{20x}{\sqrt{3600000 - 600x^2}} = 1 - \frac{2x}{\sqrt{36000 - 6x^2}} = \frac{\sqrt{36000 - 6x^2} - 2x}{\sqrt{36000 - 6x^2}} \\ z' = 0 &\Rightarrow \frac{\sqrt{36000 - 6x^2} - 2x}{\sqrt{36000 - 6x^2}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 60 \\ x \neq \pm 20\sqrt{15} \end{cases} \end{aligned}$$

По условию задачи $x \neq -60$. Проверим значение производной на промежутках $0 \leq x < 60$; $x > 60$.

Если $0 \leq x < 60$, то $z' > 0$, если $x > 60$, то $z' < 0$, тогда $x = 60$ – точка максимума, значит:

$$z_{\text{наиб}} = z(60) = 60 + \sqrt{\frac{1200000 - 200 \cdot 60^2}{300}} = 100.$$

Таким образом, наибольшее количество товаров – 100.

Ответ: 100.

7. Владимир является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $4t$ единиц товара, а, если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $5t$ единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Владимир платит рабочему 500 рублей. Владимиру нужно каждую неделю производить 410 единиц товара. Какую наименьшую сумму придется тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

И. Строим модель

Пусть x^2 часов рабочие трудятся на заводе, расположенном в первом городе, тогда оплата труда суммарно составит $500x^2$ рублей, y^2 часов – во втором городе, тогда оплата труда суммарно составит $500y^2$ рублей.

Пусть z – сумма еженедельной оплаты труда.

Тогда общая оплата труда с двух заводов составит:

$$500x^2 + 500y^2 = z.$$

При этом на заводе, расположенном в первом городе, производят $4x$ единиц товара, во втором – $5y$ единиц товара.

Завод	Производительность		Время	Оплата за час	Оплата за неделю
1	$4x$	410	x^2	500	z
2	$5y$		y^2	500	

Используя полученную таблицу, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x + 5y = 410 \\ 500x^2 + 500y^2 = z \end{cases}$$

II. Вычисления

$$\begin{cases} 4x + 5y = 410 \\ 500x^2 + 500y^2 = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{410-4x}{5} \\ z = 500x^2 + 500y^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = 500x^2 + 500\left(\frac{410-4x}{5}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = 820x^2 - 65600x + 3362000$$

Требуется найти $z_{\text{наим}}$.

Найдем производную функции z :

$$z' = 1640x - 65600$$

$$z' = 0 \Rightarrow 1640x - 65600 = 0 \Rightarrow x = 40$$

Проверим значение производной на промежутках:

$$0 \leq x < 40; x > 40.$$

Если $0 \leq x < 40$, то $z' < 0$, если $x > 40$, то $z' > 0$, тогда $x = 40$ – точка минимума, значит:

$$z_{\text{наим}} = z(40) = 820 \cdot 40^2 - 65600 \cdot 40 + 3362000 = 2050000.$$

Таким образом, наименьшая сумма, которую придется тратить еженедельно составит 2050000 рублей.

Ответ: 2050000.

8. В двух областях есть по 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,3 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда. Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

I. Строим модель

В каждой области рабочие трудятся по $100 \cdot 10 = 1000$ часов.

Пусть в первой области будет затрачено на добычу алюминия x человеко-часов, где $x \in [0; 1000]$, а y^2 часов затрачено на добычу y кг алюминия во второй области, где $y^2 \in [0; 1000]$, $y \in [0; 10\sqrt{10}]$.

	Алюминий		Никель	
	Количество человеко-часов	Количество, кг	Количество человеко-часов	Количество, кг
1-ая область	x	$0,3x$	$1000 - x$	$0,1(1000 - x)$
2-ая область	y^2	y	$1000 - y^2$	$\sqrt{1000 - y^2}$
ВСЕГО		$0,3x + y$		$0,1(1000 - x) + \sqrt{1000 - y^2}$

Т.к. на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля, то

$$0,3x + y = 2(0,1(1000 - x) + \sqrt{1000 - y^2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,5x = 200 - y + 2\sqrt{1000 - y^2}$$

Пусть z – масса сплава, тогда:

$$z = 0,3x + y + 0,1(1000 - x) + \sqrt{1000 - y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = 0,2x + y + 100 + \sqrt{1000 - y^2}. \text{ Составим систему:}$$

$$\begin{cases} 0,5x = 200 - y + 2\sqrt{1000 - y^2} \\ z = 0,2x + y + 100 + \sqrt{1000 - y^2} \end{cases}$$

II. Вычисления

$$\begin{cases} 0,5x = 200 - y + 2\sqrt{1000 - y^2} \\ z = 0,2x + y + 100 + \sqrt{1000 - y^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0,2x = 80 - \frac{2}{5}y + \frac{4\sqrt{1000 - y^2}}{5} \\ z = 0,2x + y + 100 + \sqrt{1000 - y^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = 80 - \frac{2}{5}y + \frac{4\sqrt{1000 - y^2}}{5} + y + 100 + \sqrt{1000 - y^2} =$$

$$= 180 + \frac{3}{5}y + \frac{9}{5}\sqrt{1000 - y^2}$$

Требуется найти $z_{\text{наиб}}$ при $y \in [0; 10\sqrt{10}]$

Найдем производную функции z :

$$z' = \frac{3}{5} + \frac{9}{5} \cdot \frac{1}{2} (1000 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2y) = \frac{3}{5} - \frac{9y}{5\sqrt{1000-y^2}} = \frac{3\sqrt{1000-y^2}-9y}{5\sqrt{1000-y^2}}$$

$$z' = 0, \frac{3\sqrt{1000-y^2}-9y}{5\sqrt{1000-y^2}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = \pm 10 \\ y \neq \pm 10\sqrt{10} \end{cases}$$

По условию задачи $y \neq -10$.

Проверим значение производной на промежутках:

$$0 \leq x < 10; 10 < x < 10\sqrt{10}.$$

Если $0 \leq x < 10$, то $z' > 0$, если $10 < x < 10\sqrt{10}$, то $z' < 0$, тогда $x = 10$ – точка максимума, значит:

$$z_{\text{наиб}} = z(10) = 180 + \frac{3}{5} \cdot 10 + \frac{9}{5} \sqrt{1000 - 10^2} = 240.$$

Таким образом, наибольшее количество сплава – 240 кг.

Ответ: 240.

9. В двух областях есть по 90 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,3 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда. Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причем 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно добыть в двух областях суммарно для нужд промышленности?

I. Строим модель

В каждой области рабочие трудятся по $90 \cdot 5 = 450$ часов.

Так как никель можно заменить алюминием, то нужно, чтобы все рабочие первой области добывали алюминий, так как никеля за час добывают в 3 раза больше, чем алюминия. Пусть y^2 часов затрачено на добычу y кг никеля во второй области, где $y^2 \in [0; 450]$, тогда $y \in [0; 15\sqrt{2}]$.

	Алюминий		Никель	
	Количество человеко- часов	Количество, кг	Количество человеко- часов	Количество, кг
1-ая область	450	$450 \cdot 0,3 = 135$	0	0
2-ая область	y^2	y	$450 - y^2$	$\sqrt{450 - y^2}$
ВСЕГО		$135 + y$		$\sqrt{450 - y^2}$

Пусть z – масса сплава, тогда $z = 135 + y + \sqrt{450 - y^2}$

II. Вычисления

Требуется найти $z_{\text{наиб}}$ при $y \in [0; 15\sqrt{2}]$

Найдем производную функции z :

$$z' = 1 + \frac{1}{2}(450 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2y) = 1 - \frac{y}{\sqrt{450 - y^2}} = \frac{\sqrt{450 - y^2} - y}{\sqrt{450 - y^2}}$$

$$z' = 0, \frac{\sqrt{450 - y^2} - y}{\sqrt{450 - y^2}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = \pm 15 \\ y \neq \pm 15\sqrt{2} \end{cases}$$

По условию задачи $y \neq -15$.

Проверим значение производной на промежутках:

$$0 \leq x < 15; 15 < x < 15\sqrt{2}.$$

Если $0 \leq x < 15$, то $z' > 0$, если $15 < x < 15\sqrt{2}$, то $z' < 0$, тогда $x = 15$ – точка максимума, значит:

$$z_{\text{наиб}} = z(15) = 135 + 15 + \sqrt{450 - 15^2} = 165.$$

Таким образом, наибольшее количество сплава – 165 кг.

Ответ: 165.

10. В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 20 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий добывает 1 кг алюминия или 2 кг никеля. Во второй шахте имеется 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 2 кг алюминия или 1 кг никеля. Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг

алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

I. Строим модель

В первой шахте рабочие трудятся $20 \cdot 5 = 100$ часов, во второй шахте рабочие трудятся $100 \cdot 5 = 500$ часов.

Пусть в первой шахте будет затрачено на добычу алюминия x человеко-часов, где $x \in [0; 100]$, а во второй шахте будет затрачено на добычу алюминия y человеко-часов, где $y \in [0; 500]$.

	Алюминий		Никель	
	Количество человеко-часов	Количество, кг	Количество человеко-часов	Количество, кг
1-ая шахта	x	$1 \cdot x$	$100 - x$	$2(100 - x)$
2-ая шахта	y	$2y$	$500 - y$	$1 \cdot (500 - y)$
ВСЕГО		$x + 2y$		$700 - 2x - y$

Т.к. на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля, то

$$x + 2y = 2(700 - 2x - y) \Rightarrow 4y = 1400 - 5x$$

Пусть z – масса сплава, тогда $z = x + 2y + 700 - 2x - y \Rightarrow$

$\Rightarrow z = y - x + 700$. Составим систему:

$$\begin{cases} 4y = 1400 - 5x \\ z = y - x + 700 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4y = 1400 - 5x \\ z = y - x + 700 \end{cases}$$

II. Вычисления

$$\begin{cases} 4y = 1400 - 5x \\ z = y - x + 700 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 350 - \frac{5}{4}x \\ z = y - x + 700 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = 350 - \frac{5}{4}x - x + 700 = 1050 - \frac{9}{4}x$$

Требуется найти $z_{\text{наиб}}$ при $x \in [0; 100]$. Т.к. функция $z = 1050 - \frac{9}{4}x$ – линейная с отрицательным коэффициентом, значит наибольшее значение функции достигается при $x = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow z_{\text{наиб}} = 1050 - \frac{9}{4} \cdot 0 = 1050$$

Таким образом, наибольшее количество сплава – 1050 кг.

Ответ: 1050.

11. У фермера есть два поля, каждое площадью 15 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свеклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 200 ц/га, а на втором – 450 ц/га. Урожайность свеклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором 200 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 1200 руб. за центнер, а свеклу – по цене 1400 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

I. Строим модель

На первом поле урожайность свеклы выше, и она дороже, значит его следует засадить полностью свеклой. Пусть x га второго поля засадили картофелем, где $x \in [0; 15]$.

	Картофель		Свекла	
	Площадь, га	Стоимость, тыс. руб	Площадь, га	Стоимость, тыс. руб
1-ое поле	0	0	15	$300 \cdot 15 \cdot 1,4 = 6300$
2-ое поле	x	$450x \cdot 1,2$	$15 - x$	$200(15 - x) \cdot 1,4 = 4200 - 280x$
ВСЕГО		$540x$		$10500 - 280x$

Пусть z – прибыль от продажи овощей, тогда:

$$z = 540x + 10500 - 280x \Rightarrow z = 260x + 10500$$

II. Вычисления

Требуется найти $z_{\text{наиб}}$ при $x \in [0; 15]$.

Т.к. функция $z = 260x + 10500$ – линейная с положительным коэффициентом, значит наибольшее значение функции достигается при $x = 15 \Rightarrow z_{\text{наиб}} = 260 \cdot 15 + 10500 = 14400$

Таким образом, наибольшая прибыль от продажи овощей составит 14400 тыс. руб. или 14400000 руб.

Ответ: 14400000.

12. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нем отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 21 квадратный метр и номера «люкс» площадью 49 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 1099 квадратных метров. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 рублей в сутки, а номер «люкс» - 4500 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своем отеле предприниматель?

I. Строим модель

В отеле может поместиться $\frac{1099}{21} \approx 52$ стандартных номера или $\frac{1099}{49} \approx 22$ номера «люкс».

Пусть x – количество стандартных номеров, где $x \in [0; 52]$, y – количество номеров «люкс», где $y \in [0; 22]$.

	Количество номеров	Площадь, м ²	Стоимость, тыс. руб/сутки
Стандарт	x	$21x$	$2x$
«Люкс»	y	$49y$	$4,5y$
ВСЕГО		$21x + 49y \leq 1099$	$2x + 4,5y$

Пусть z – прибыль от сдачи номеров, тогда: $z = 2x + 4,5y$

II. Вычисления

Т.к. требуется найти наибольшую сумму, которую предприниматель заработает за одни сутки, то следует максимизировать значения выражения $2x + 4,5y$:

$$21x + 49y \leq 1099 \Rightarrow x \leq \frac{1099-49y}{21} \Rightarrow x \leq \frac{157-7y}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + 4,5y \leq \frac{314-14y}{3} + 4,5y \Rightarrow 2x + 4,5y \leq \frac{314-0,5y}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x + 9y \leq \frac{628-y}{3}, \text{ тогда } y \text{ должен быть наименьшим, значит}$$

$$4x + 9y \leq \frac{628-0}{3} \Rightarrow 4x + 9y \leq 209\frac{1}{3}, \text{ но } x \text{ и } y - \text{целые, тогда:}$$

$$4x + 9y \leq 209. \text{ При этом равенство достигается при } x = 50, y = 1.$$

Максимальный доход составляет $2 \cdot 50 + 4,5 \cdot 1 = 104,5$.

Таким образом, наибольшая прибыль составит 104500 руб.

Ответ: 104500.

13. Производство x тыс. единиц продукции обходится в $q = 0,5x^2 + 2x + 5$ млн рублей в год. При цене p тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет $px - q$. При каком наименьшем значении p через четыре года суммарная прибыль составит не менее 52 млн рублей?

I. Строим модель

Прибыль за 1 год выражается формулой: $y = px - q =$
 $= px - (0,5x^2 + 2x + 5)$. По условию задачи: $4y \geq 52 \Rightarrow y \geq 13$,
 тогда $px - (0,5x^2 + 2x + 5) \geq 13$

II. Вычисления

$$px - (0,5x^2 + 2x + 5) \geq 13 \Rightarrow px - 0,5x^2 - 2x - 5 \geq 13 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 2(p - 2)x + 36 \leq 0$$

Неравенство будет иметь решение, если $D \geq 0$.

$$D = (-2(p - 2))^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = 4(p - 2)^2 - 144$$

$$4(p - 2)^2 - 144 \geq 0 \Rightarrow (p - 2)^2 - 36 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} p \leq -4 \\ p \geq 8 \end{cases}$$

Т.к., по условию p – цена за единицу продукции, то $p \geq 8$, тогда наименьшее значение: $p = 8$ тыс. руб.

Ответ: 8.

14. Строительство нового завода стоит 122 млн рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны $0,5x^2 - 2x + 10$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. руб. за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за год составит $px - (0,5x^2 - 2x + 10)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 4 года?

I. Строим модель

Пусть прибыль за 1 год в млн рублей будет задана функцией:

$$f(x) = px - (0,5x^2 - 2x + 10) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = -0,5x^2 + x(p + 2) - 10$$

Т.к. необходимо найти наибольшую прибыль, то следует найти наибольшее значение функции.

Функция $f(x) = -0,5x^2 + x(p+2) - 10$ – квадратичная, графиком является парабола с ветвями вниз, значит наибольшее значение функции достигается в вершине параболы:

$$x_0 = \frac{-(p+2)}{2 \cdot (-0,5)} = p+2 \Rightarrow f(p+2) = -0,5(p+2)^2 + (p+2)^2 - 10 \Rightarrow f(p+2) = 0,5(p+2)^2 - 10.$$

Строительство завода должно окупить не более, чем за 4 года, т.е. прибыль за 4 года должна быть больше стоимости постройки завода: $4f(p+2) \geq 122$

II. Вычисления

$$4f(p+2) \geq 122 \Rightarrow 4(0,5(p+2)^2 - 10) \geq 122 \Rightarrow \\ \Rightarrow (p+2)^2 - 81 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} p \leq -11 \\ p \geq 7 \end{cases}$$

Т.к., по условию p – цена за единицу продукции, то $p \geq 7$, тогда наименьшее значение: $p = 7$ тыс. руб.

Ответ: 7.

15. Зависимость количества Q (в шт., $0 \leq Q \leq 20000$) купленного у фирмы товара от цены P (в руб. за шт.) выражается формулой $Q = 20000 - P$. Затраты на производство Q единиц товара составляют $6000Q + 4000000$ рублей. Кроме затрат на производство, фирма должна платить налог t рублей ($0 < t < 10000$) с каждой произведенной единицы товара. Таким образом, прибыль фирмы составляет $PQ - 6000Q - 4000000 - tQ$ рублей, а общая сумма налогов, собранных государством, равна tQ рублей.

Фирма производит такое количество товара, при котором ее прибыль максимальна. При каком значении t общая сумма налогов, собранных государством, будет максимальной?

I. Строи модель

Т.к. $Q = 20000 - P$, то $P = 20000 - Q$, тогда $PQ - 6000Q - 4000000 - tQ = (20000 - Q)Q - 6000Q - 4000000 - tQ =$

$$= -Q^2 + Q(14000 - t) - 4000000$$

Т.к. прибыль максимальная, а функция квадратичная с графиком параболой (ветви вниз), то наибольшее значение достигается в ее вершине:

$$Q_0 = \frac{-(14000-t)}{2 \cdot (-1)} = \frac{14000-t}{2} = 7000 - \frac{t}{2} \Rightarrow tQ = 7000t - \frac{t^2}{2}.$$

Следует найти t , при котором сумма налогов, собранных государством, максимальна, т.е. найти точку максимума функции $7000t - \frac{t^2}{2}$.

II. Вычисления

Функция $7000t - \frac{t^2}{2}$ – квадратичная, графиком является парабола с ветвями вниз, значит наибольшее значение достигается в ее вершине: $t_0 = \frac{-7000}{2 \cdot (-\frac{1}{2})} = 7000$.

Таким образом, при $t = 7000$ общая сумма налогов, собранных государством, будет максимальной.

Ответ: 7000.

Учебное издание

Кирсанова Лариса Валерьевна

РЕШЕБНИК

**к учебно-методическому пособию
и практикуму по теме «Финансовая
математика» для подготовки к ЕГЭ
по математике профильного уровня
учащихся 10–11 классов**

В авторской редакции

ООО «Эдитус»

125565, Москва, Ленинградское шоссе, д. 80, стр. 1

8 (800) 775-30-87

www.editus.ru

Отпечатано в типографии ООО Фирма «П-Центр»

129515, г. Москва, ул. Академика Королёва, 13

Подписано в печать ?..?

Формат 148х210. Усл. печ. л. 4,75

Печать цифровая. Бумага офсетная

Тираж 20 экз. Заказ № 202405121

ISBN 978-5-00217-346-4

www.editus.ru



9 785002 173464 >