

020 Государственное бюджетное профессиональное
образовательное учреждение
Ленинградской области
«Волховский многопрофильный техникум»

Методические указания
по выполнению практических работ
по дисциплине ЕН.01 «Математика»
по специальности:

23.02.01 Организация перевозок и управление на транспорте
(по видам)

Волхов

2024г.

РАССМОТРЕНО:

На заседании

цикловой комиссии

Протокол № _____

от « ____ » _____ 202__ г.

Председатель _____

СОГЛАСОВАНО:

Зав. уч. частью

Файзуллина Г.З.

« ____ » _____ 20__ г.

Методическое пособие предназначено для организации аудиторных практических работ студентов второго курса очного отделения ГБПОУ ЛО «Волховский многопрофильный техникум»

.

Организация-разработчик:

Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
Ленинградской области «Волховский многопрофильный техникум» (ГБПОУ ЛО «ВМТ»)

Разработчик:

Гаврилова Л. А. — преподаватель ГБПОУ ЛО «ВМТ»

СОДЕРЖАНИЕ

1. Пояснительная записка.....	4
2. Практическая работа № 1. Нахождение производных элементарных и сложных функций. Частные производные.....	9
3. Практическая работа № 2. Нахождение неопределенных интегралов	16
4. Практическая работа № 3. Решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными	25
5. Практическая работа № 4. Операции над множествами.	29
6. Практическая работа №5. Построение графа по условиям ситуационных задач.....	35
7. Практическая работа № 6. Вычисление определителей второго и третьего порядка.....	47
8. Практическая работа № 7. Решение систем уравнений	55
9. Практическая работа № 8. Решение задач на нахождение вероятности события.....	62
10. Практическая работа № 9. Построение рядов распределения случайной величины по заданному условию.....	70
11. Практическая работа № 10. Расчет числовых характеристик случайной величины...	74

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания к практическим занятиям разработаны в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом по специальностям среднего профессионального образования **23.02.01 Организация перевозок и управления на транспорте (по видам)** и рабочей программой учебной дисциплины ЕН.01 «Математика», предназначенной для реализации государственных требований к уровню подготовки выпускников.

Цель данных методических указаний – оказать помощь студентам при выполнении практических работ и закреплении теоретических знаний по основным разделам дисциплины.

Комплекс практических занятий является вспомогательным инструментом при формировании общей системы знаний на основе использования математических идей и методов в профессиональной деятельности; практического применения приобретенных знаний и умений при выполнении исследовательских и практических работ.

Практические занятия учебной дисциплины «Математика» ориентированы на развитие логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, необходимой для будущей профессиональной деятельности, для продолжения образования и самообразования; овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми в повседневной жизни, для изучения смежных естественнонаучных дисциплин и дисциплин профессионального цикла.

Выполнение практических работ направлено на формирование общих и профессиональных компетенций:

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

В результате изучения дисциплины студент должен уметь применять математические методы дифференциального и интегрального исчисления для решения профессиональных

задач; применять основные положения теории вероятностей и математической статистики в профессиональной деятельности; использовать приемы и методы математического синтеза и анализа в различных профессиональных ситуациях;

Пособие содержит требования к выполнению и оформлению практических занятий, тематический перечень работ, методические указания к выполнению практической части, варианты заданий, вопросы для самоконтроля, список литературы.

Программой учебной дисциплины «Математика» на проведение практических занятий для базового уровня профессионального образования предусмотрено 20 часов. Практические работы могут проводиться в любом учебном кабинете, формой организации студентов на практических работах - индивидуальная. Продолжительность занятия рассчитана на 2 академических часа.

К выполнению практической работы можно приступать только после изучения соответствующей темы и получения навыков решения задач. Предусмотренные задания носят репродуктивный, частично-поисковый и поисковый характер. Все задачи и расчеты обязательно должны быть доведены до окончательного числового результата. Задания практической работы составлены в 30 вариантах. Вариант практической работы соответствует номеру студента по списку в журнале.

Все практические работы, сдаваемые обучающимися на проверку, должны быть выполнены в обычной тетради в клетку.

При выполнении практической работы студентам рекомендуется:

- использовать учебные пособия, справочники;
- проводить несложные дедуктивные рассуждения;
- обосновывать шаги решения задач;
- формулировать определения математических понятий;
- пользоваться математической терминологией и символикой;
- письменно оформлять решения задач;
- пользоваться калькулятором;
- самостоятельно изучать учебный материал.

Все представленные варианты практических работ даны одинаковой степени трудности.

За каждую практическую работу студент должен получить положительную оценку. Итоговой формой изучения дисциплины является дифференцированный зачет. Студенты, не выполнившие практические работы, не аттестуются.

**ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ И
ОФОРМЛЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ**

1. Все работы выполняются в тетради для практических занятий.
2. Работы оформляют чернилами одного цвета аккуратным и разборчивым почерком.
3. Условия задач должны быть переписаны полностью.
4. Приступая к решению, внимательно изучите методические указания к работе.
5. Уделите внимание вопросам для самоконтроля.
6. Решение сопроводите краткими пояснениями, указав используемые формулы.

ТЕМАТИКА ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Номер раздела учебной дисциплины	Номер и тема занятия	Количество аудиторных часов
Раздел 1. Математический анализ	Практическая работа № 1 Нахождение производных элементарных и сложных функций. Частные производные	2
	Практическая работа № 2 Нахождение неопределенных интегралов	2
	Практическая работа № 3 Решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными	2
Раздел 2. Основы дискретной математики	Практическая работа № 4 Операции над множествами.	2
	Практическая работа № 5 Построение графа по условиям ситуационных задач	2
Раздел 3. Линейная алгебра	Практическая работа №6. Действия над матрицами.	2
	Практическая работа №7. Вычисление определителей второго и третьего порядка	2
	Практическая работа №8. Решение систем уравнений	
Раздел 4. Основы теории вероятностей и математической статистики	Практическая работа № 9 Построение рядов распределения случайной величины по заданному условию	2
	Практическая работа № 10 Расчет числовых характеристик случайной величины	2
	Итого:	20

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ

Отметка «5» ставится, если:

- работа выполнена полностью;
- в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;
- в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится, если:

- работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);
- допущена одна существенная ошибка или два-три несущественных ошибки.

Отметка «3» ставится, если:

- допущены более одной существенной ошибки или более двух-трех несущественных ошибок, но обучающийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме, при этом правильно выполнено не менее половины работы.

Отметка «2» ставится, если:

- допущены существенные ошибки, показавшие, что обучающийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере;
- работа показала полное отсутствие у обучающегося обязательных знаний и умений по проверяемой теме или значительная часть работы выполнена не самостоятельно.

К категории несущественных ошибок следует отнести погрешности, связанные с небрежным выполнением записей, рисунков, графиков, чертежей, а также погрешности и недочеты, которые не приводят к искажению смысла задания и его выполнения.

К категории существенных ошибок следует отнести ошибки, связанные с незнанием, непониманием обучающегося основных положений теории и с неправильным применением методов, способов, приемов решения практических заданий, предусмотренных программой. При наличии существенной ошибки задание считается невыполненным.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1

Нахождение производных элементарных и сложных функций. Частные производные

Цель работы: Проверить на практике знание понятия производной функции, умение находить производные элементарных функций, сложных функций, частные производные функции двух переменных, пользуясь таблицей производных и правилами дифференцирования, понятием сложная функция. Закрепить навыки вычисления производных функций.

Оборудование: методические указания по выполнению работы, плакат «Правила дифференцирования», таблица производных элементарных функций.

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

1. Изучить краткие теоретические сведения;
2. Изучить схему решения задач
3. Оформить отчет по работе.

Содержание отчета:

1. Название практической работы, ее цель.
2. Основные теоретические сведения.
3. Выполненные задания в соответствии с данными своего варианта (не забывайте списывать само задание).
4. Ответы на контрольные вопросы
5. Вывод по практической работе.

Теоретическая часть:

Производная (функции в точке) — основное понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции (в данной точке). Определяется как **предел отношения** приращения функции к приращению ее аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если такой предел существует. Функцию, имеющую конечную производную (в некоторой точке), называют дифференцируемой (в данной точке).

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Процесс вычисления производной называется дифференцированием. Обратный процесс — нахождение первообразной — интегрирование. При выполнении этой операции часто приходится работать с частными, суммами, произведениями функций, а также с «функциями функций», то есть сложными функциями. Исходя из определения производной, можно вывести правила дифференцирования, облегчающие эту работу.

Если C — постоянное число и $f=f(x)$, $g=g(x)$ — некоторые дифференцируемые функции, то справедливы следующие правила дифференцирования:

$$(f \pm g)' = f' \pm g' \quad (Cf)' = Cf' \quad (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Формулы дифференцирования:

$$1. (C)' = 0.$$

$$2. (kx + b)' = k.$$

$$3. (x^r)' = rx^{r-1}.$$

$$4. (e^x)' = e^x.$$

$$5. (a^x)' = a^x \ln a.$$

$$6. (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

$$7. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

$$8. (\sin x)' = \cos x.$$

$$9. (\cos x)' = -\sin x.$$

$$10. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$11. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$12. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$13. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$14. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$15. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

«Сложная функция – это композиция двух и более функций». Термин «сложная» функция не является понятием сложности начертания или исследования, а указывает на вид или «конструкцию» функциональной зависимости. Сложную функцию можно задать формулой $y=f(g(x))$, где $g(x)$ – внутренняя функция, $f(t)$ – внешняя функция.

Формула нахождения производной сложной функции: $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$, то есть производную внешней функции $f(x)$ надо умножить на производную внутренней функции $g(x)$.

Примеры решения заданий:

ПРИМЕР 1. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные элементарных функций:

$$1. y = 3x^4 + 7^x - \frac{1}{x} + \operatorname{arcctg} x$$

$$2. y = (2x^2 - 4x) \operatorname{ctg} 4x$$

$$3. y = \frac{x+6}{3x-1}$$

РЕШЕНИЕ. 1. Используя таблицу производных и правило дифференцирования для производной суммы, найдем

$$y' = 3 \cdot 4x^3 + 7^x \ln 7 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 12x^3 + 7^x \ln 7 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}.$$

2. Используя таблицу производных и правило дифференцирования для производной произведения, найдем $y' = (2x^2 - 4x) \operatorname{ctg} 4x + (2x^2 - 4x)(\operatorname{ctg} 4x)' = (4x - 4) \operatorname{ctg} 4x + (2x^2 - 4x) \cdot 4 \cdot \left(\frac{-1}{\sin^2 x}\right) = (4x - 4) \operatorname{ctg} 4x - \frac{4(2x^2 - 4x)}{\sin^2 x} = (4x - 4) \operatorname{ctg} 4x - \frac{8x^2 - 16x}{\sin^2 x}$

3. Используя таблицу производных и правило дифференцирования для производной частного, найдем: $y' = \frac{(x+6) \cdot (3x-1) - (x+6)(3x-1)'}{(3x-1)^2} = \frac{1 \cdot (3x-1) - (x+6) \cdot 3}{(3x-1)^2} = \frac{3x-1-3x-18}{(3x-1)^2} = \frac{-19}{(3x-1)^2}$.

ПРИМЕР 2. Заданы функции $f(x) = 2 + 6x^3$, $g(x) = tg x$. Задайте формулой сложную функцию h , если: а) $h(x) = g(f(x))$; б) $h(x) = f(g(x))$.

РЕШЕНИЕ. а) Функцию h можно представить в виде сложной функции $h(x) = g(f(x))$ таким образом:

$$h(x) = g(f(x)) = tg(2 + 6x^3).$$

б) Функцию h можно представить в виде сложной функции $h(x) = f(g(x))$ таким образом:

$$h(x) = f(g(x)) = 2 + 6tg^3 x.$$

ПРИМЕР 3. Найдите производные сложных функций: а) $h(x) = \sqrt{9 - x^2}$; б) $h(x) = \sin\left(3 - \frac{x}{2}\right)$.

РЕШЕНИЕ. а) Так как $h(x) = g(f(x))$, где $g(y) = \sqrt{y}$, $y = f(x) = 9 - x^2$, то $g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ и

$$y' = f'(x) = -2x, \text{ откуда } h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' = \frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}.$$

б) Так как $h(x) = g(f(x))$, где $g(y) = \sin y$, $y = f(x) = 3 - \frac{x}{2}$, то $g'(y) = \cos y$ и $y' = f'(x) = -\frac{1}{2}$, откуда $h'(x) = \cos y \cdot y' = \cos\left(3 - \frac{x}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \cos\left(3 - \frac{x}{2}\right)$.

ПРИМЕР 4. Найдите частные производные первого порядка для функции

$$z = 2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7$$

РЕШЕНИЕ. Найти частные производные первого и второго порядка функции

Сначала найдем частные производные первого порядка. Их две.

Обозначения: $\frac{\partial z}{\partial x}$ – частная производная по «икс» и $\frac{\partial z}{\partial y}$ – частная производная по «игрек».

Когда мы находим частную производную по «икс», то переменная y считается константой (постоянным числом).

Будем использовать правила дифференцирования $(u \pm v)' = u' \pm v'$, $(Cu)' = Cu'$. Обратите внимание на первое слагаемое: так как y **считается константой, а любую константу можно вынести за знак производной**, то y^3 мы выносим за скобки. То есть в данной ситуации y^3 ничем не лучше обычного числа. Теперь посмотрим на третье слагаемое $5y$: здесь, наоборот, выносить нечего. Так как y константа, то $5y$ – тоже константа.

Тогда $\frac{\partial z}{\partial x} = 2y^3 \cdot 2x + 3 \cdot 4x^3 + 0 - 0 = 4xy^3 + 12x^3$. Когда мы находим частную производную по «игрек», то переменная x считается константой (постоянным числом).

Используем те же правила дифференцирования $(u \pm v)' = u' \pm v'$, $(Cu)' = Cu'$. В первом слагаемом выносим константу x^2 за знак производной, во втором слагаемом ничего вынести нельзя поскольку $3x^4$ – уже константа.

Тогда: $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 \cdot y^3 + 0 + 5 \cdot 1 - 0 = 2x^2y^3 + 5$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Задание 1: Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные элементарных функций:

№ варианта	Задание для практической работы	№ варианта	Задание для практической работы	№ варианта	Задание для практической работы
1	$y = x^8 - 3x^4 - x + 5$ $y = x^2(3x + x^3)$	11	$y = \ln x + 2e^x - 4x^2$ $y = (2x + 5)(x + 1)$	21	$y = \frac{\cos x}{2 - x^3}$ $y = x^{22} - 2x^{12} - 8$
2	$y = 5x^3 - 3x^2 + x - 1$ $y = \frac{1 + 2x}{3 - 5x}$	12	$y = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 4}$ $y = \operatorname{tg} x + \cos x$	22	$y = \sqrt{2}x - 2 \sin x$ $y = \frac{16 - 2x}{3x}$
3	$y = x^2 + e^x - 3 \operatorname{ctg} x$ $y = (x - \cos x) \cdot 4 \sin x$	13	$y = 2 \cos x + x^2 - 7$ $y = \frac{x - 3}{x - 2}$	23	$y = 2x^4 - 3 \operatorname{tg} x$ $y = (\cos x - 1) \cdot 3x$
4	$y = x^3 - 3x^2 + 3x$ $y = (3x - 6)(x^3 - x)$	14	$y = -x^3 - 6x + \cos x$ $y = (x - 2) \cdot 2 \sin x$	24	$y = 6x^{\frac{1}{2}} + 3x^3 + 7x + 2$ $y = x \cdot \cos x$
5	$y = -x^2 - 2x^8 + 126$ $y = \frac{4 + 2x}{x - 5}$	15	$y = 4x^2 - x^{11} + 4$ $y = \frac{1}{2x - 7}$	25	$y = 4x^7 - 5x^5 + 2x$ $y = \frac{3 - 4x}{x^2}$
6	$y = 3 \ln x - \operatorname{ctg} x - 9$ $y = \frac{3x - 1}{x + 5}$	16	$y = (8 - 4x)(3x - 8)$ $y = 3 \sin x + \sqrt{x}$	26	$y = -3x^5 - e^x - \operatorname{ctg} x$ $y = \frac{2x + 12}{x^2 - 5}$
7	$y = x^2 + x^5 - 3x$ $y = \frac{6}{x} + \frac{x}{6}$	17	$y = (7 + 4x)(2x - 1)$ $y = 5 \cos x + 4\sqrt{x}$	27	$y = -35 \sin x + 2\sqrt{x}$ $y = (5x + 8)(4 - x)$
8	$y = 12x^6 + 3 \cos x$ $y = (\sin x + x)(3x - 2)$	18	$y = (\sin x - 3)(4 - x)$ $y = \frac{5}{3}x^3 + \frac{5}{2}x + 6x^3$	28	$y = 9x^{\frac{1}{3}} - x^4 - 3 \ln x$ $y = x \cdot (\cos x - 2 \sin x)$
9	$y = 3 \cos x + e^x + 5$ $y = \frac{3}{x + 8}$	19	$y = x \cdot (2x^5 - 4x + 12)$ $y = 1 - 2 \operatorname{tg} x$	29	$y = 2 \operatorname{tg} x - \cos x + x$ $y = (3 - x)(6x - 4)$
10	$y = 4x^8 + 8x^2 - 33$ $y = (3 - 6x)(x^3 + 1)$	20	$y = \sin x(4 - x^2)$	30	$y = \frac{1}{3}x^6 - 5 \operatorname{ctg} x$ $y = (\sin x + 3x) \cdot x$

			$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x$		
--	--	--	--	--	--

Задание 2: Задайте формулой сложную функцию h , если: а) $h(x) = g(f(x))$; б) $h(x) = f(g(x))$.

№ варианта	Задание для практической работы	№ варианта	Задание для практической работы	№ варианта	Задание для практической работы
1	$f(x) = 4x + 7$ $g(x) = 2\sin x$	11	$f(x) = 3 - 2x$ $g(x) = x^2$	21	$f(x) = \cos x$ $g(x) = 3x^2$
2	$f(x) = \sqrt{x}$ $g(x) = 3x^5 + 9x$	12	$f(x) = \frac{4}{x}$ $g(x) = \sqrt{x}$	22	$f(x) = x^{13}$ $g(x) = \ln x$
3	$f(x) = e^x$ $g(x) = 3x + 5$	13	$f(x) = 4^x$ $g(x) = x + 2$	23	$f(x) = \arctg x$ $g(x) = 2x + 5$
4	$f(x) = \sqrt{x}$ $g(x) = \cos 3x$	14	$f(x) = \ln x$ $g(x) = \sin x$	24	$f(x) = 2x$ $g(x) = x^2 + 1$
5	$f(x) = x^3$ $g(x) = 3x - 5$	15	$f(x) = 2e^x$ $g(x) = \cos x$	25	$f(x) = 8^x$ $g(x) = \cos x$
6	$f(x) = \operatorname{ctg} x$ $g(x) = 9x - 1$	16	$f(x) = \sqrt{x}$ $g(x) = 1 - \cos x$	26	$f(x) = 3x - 9$ $g(x) = \sin x$
7	$f(x) = x^{17}$ $g(x) = \frac{x-3}{4}$	17	$f(x) = x - 9$ $g(x) = \ln x$	27	$f(x) = x^7$ $g(x) = \ln x$
8	$f(x) = \operatorname{tg} x$ $g(x) = \sqrt{x+5}$	18	$f(x) = \ln x$ $g(x) = x^2$	28	$f(x) = \operatorname{arctg} x$ $g(x) = 3x + 5$
9	$f(x) = x^{17}$ $g(x) = \sqrt{x}$	19	$f(x) = e^{x-9}$ $g(x) = \sin x$	29	$f(x) = 2x + 8$ $g(x) = x^3$
10	$f(x) = \operatorname{tg} x$ $g(x) = \frac{1}{x+1}$	20	$f(x) = x - 5$ $g(x) = \frac{13}{x^2}$	30	$f(x) = \operatorname{tg} x$ $g(x) = \frac{x+2}{5}$

Задание 3: Вычислите производную сложной функции:

№ варианта	Задание для практической работы	№ варианта	Задание для практической работы	№ варианта	Задание для практической работы
1	$f(x) = 5^{2x}$	11	$f(x) = \sqrt{2x-1}$	21	$f(x) = \ln(\cos x)$
2	$f(x) = \sin 3x$	12	$f(x) = 2\operatorname{tg}^3 4x$	22	$f(x) = (3x^3 + x^7)^5$
3	$f(x) = (3-x)^4$	13	$f(x) = 3\cos \frac{x}{3}$	23	$f(x) = \cos(4x^3 + 2x)$
4	$f(x) = e^{-3x}$	14	$f(x) = \frac{1}{4}\sin^4 x$	24	$f(x) = \lg(3x-5)$
5	$f(x) = \lg(3x)$	15	$f(x) = 2^{\operatorname{tg} x}$	25	$f(x) = \cos 5x$
6	$f(x) = (3-2x^3)^5$	16	$f(x) = \operatorname{tg} x^3$	26	$f(x) = \sin(4x-7)$
7	$f(x) = 4\operatorname{ctg}^3 2x$	17	$f(x) = \operatorname{tg} \sqrt{x}$	27	$f(x) = 6^{3x+1}$
8	$f(x) = \operatorname{tg}^2 2x$	18	$f(x) = \sin(5-x)$	28	$f(x) = \ln(4x+5)$

9	$f(x) = e^{-x^3}$	19	$f(x) = 3^{4x}$	29	$f(x) = ctg \frac{x}{4}$
10	$f(x) = 3 \sin^2 5x$	20	$f(x) = 2 \sin^3 4x$	30	$f(x) = e^{5x+8}$

Задание 4: Вычислите производную сложной функции:

№ вариан та	Задание для практической работы	№ вариан та	Задание для практической работы	№ вариан та	Задание для практической работы
1	$y = 4x^5 - \sin 2x + 5^x$ $y = (5x^3 - x) \cdot \ln 4x$	11	$y = 2x^4 - \ln 3x + \arctg x$ $y = e^{5x}(x^3 + \cos x)$	21	$y = 9x^5 - \ln 7x + \sin 4x$ $y = (3x + 5x^2)\sqrt{2x}$
2	$y = x^7 + \log_2 4x + \arccos x$ $y = \left(x - \frac{1}{x}\right) \operatorname{arccctg} x$	12	$y = 7x^3 - \operatorname{tg} 2x + 3^x$ $y = \sqrt{\ln(\sin 2x)}$	22	$y = 2x^4 + \arcsin(2x) + \sin 8x$ $y = \left(2x^5 - \frac{1}{x}\right) 6^x$
3	$y = 5x^3 - \cos 5x + 2^x$ $y = (2x^5 - 3x - 1) \operatorname{ctg} 5x$	13	$y = 2x^5 - \operatorname{ctg} 5x + 2^x$ $y = \ln(\operatorname{ctg}^2 3x)$	23	$y = 2x^5 - \operatorname{tg} 4x + \operatorname{ctg} 7x$ $y = \sqrt{\ln(\cos 5x)}$
4	$y = 6x^4 - \ln 4x + \operatorname{ctg} x$ $y = (1 + \operatorname{tg} 2x) 4^x$	14	$y = 2x^2 - \ln 2x + \sin(6-4x)$ $y = \sqrt{\operatorname{ctg} 2x}$	24	$y = 42x - \operatorname{ctg} 5x + 3^x$ $y = \operatorname{tg} \sqrt{3x + 5}$
5	$y = 4x^5 - \arcsin 2x + 2^x$ $y = \left(x + \frac{1}{x}\right) \operatorname{arctg} x$	15	$y = 3x^6 - \arccos 4x - \operatorname{tg} 2x$ $y = \ln^3 \sin 2x$	25	$y = 3x^2 - \cos 3x - 44x$ $y = \sqrt{2 \operatorname{ctg}^3 x}$
6	$y = 2x^3 + \log_3 2x + \cos x$ $y = \operatorname{tg} 2x(x^3 - 4x^2 + x)$	16	$y = 5x^2 - \cos 4x + 5^x$ $y = \operatorname{tg}^4 3x$	26	$y = \ln(5x^3 - x)$ $y = (2x + 4x^2)^3$
7	$y = 12x^2 - \operatorname{ctg} 2x + 4^x$ $y = \ln^4 \cos 5x$	17	$y = 4x^2 - \ln 3x + \operatorname{tg} 3xy =$ $\ln \sqrt{\cos 4x}$	27	$y = \ln \operatorname{ctg} 3x$ $y = 2^{\sin x^2}$
8	$y = 9x^3 - \cos 7x + \sin 4x$ $y = \operatorname{tg}^3((2x^3 + x + 11))$	18	$y = \sin 2x + 4x^5 - 4^x$ $y = \operatorname{ctg}^2 4x$	28	$y = 5 \operatorname{arctg}^2 3x$ $y = \ln^2(1 + 6x)$
9	$y = 5x^3 - \ln 4x + 42x$ $y = \sqrt{\operatorname{tg} 3x}$	19	$y = 2x^4 - \ln 2x + \sin 3x$ $y = \ln^3(\operatorname{tg} 4x)$	29	$y = (x^6 - 7x^4)^9$ $y = -2x^3 + \cos 8x - \sin^4 x$
10	$y = 5x^6 - \cos 3x + 4^x$ $y = (2x^3 + 7x^2) \ln 3x$	20	$y = 2x^6 - \cos 4x + \operatorname{ctg} 4x$ $y = (\sin 2x + 3x) 4^x$	30	$y = \operatorname{tg}^7 2x$ $y = 4x^4 + \cos 2x - \ln 4x$

Задание 5: Найдите частные производные первого порядка:

№ варианта	Задание для практической работы	№ варианта	Задание для практической работы
1	$z = x^5 + y^5 + 3x^8 y^3$	16	$z = x^2 y^3 + 4x^3 y^2 + 5x$
2	$z = 3x^4 + 4xy^3 + 7xy + 1$	17	$z = y^5 - 4x^2 y^4 - 6xy^3 + y$

3	$z = x^2y^5 - yx^4 + xy - 7x$	18	$z = x^3 - 6x^2y + y^2 - 3$
4	$z = x^4 - 2xy^3 + y^5 + 1.$	19	$z = 2x^5 + 3x^2y + y^2 - 4x$
5	$z = 2xy - xy^4 + 5y^3 - 3$	20	$z = 8xy + 3x^2y^7 + 7y^2$
6	$z = x^2 + xy + y^2 + 2x - y$	21	$z = 3x^2y^2 - 4xy^5 + 10xy$
7	$z = x^4 + xy + \frac{1}{2}y^2 + 5$	22	$z = -5x^2 - 36xy - 3y^2$
8	$z = 3y^3 - yx^{10} + 5y - 7xy$	23	$z = 3x^4y^3 + y^5x + 1.$
9	$z = x^2y^2 + x^3y - 7xy^3$	24	$z = x^8y^3 + 5yx^4 + 3xy + 7$
10	$z = x^5 + 2xy + 3xy^2$	25	$z = 7y^2x^3 + y^2 - xy$
11	$z = 2x^2 - xy - y - y^3$	26	$z = -x^2y^3 - x^4y - 7y$
12	$z = 3 - 2x^2 - xy - y^2$	27	$z = x^2 - 3y^3 + xy^2 - 4yx$
13	$z = yx^2 + 4y^2 - 3xy$	28	$z = 4x - yx^5 + y - xy^2$
14	$z = x^3 + 3xy^3 + 30y - 18x$	29	$z = 8yx^2 + x^3y - yx + xy^3$
15	$z = x^2 - x^4y + y^2 + 9x$	30	$z = x^5y^6 + 8xy^4 - y + 8x$

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение производной функции.
2. Как называется операция нахождения производной?
3. Какая функция называется дифференцируемой?
4. Запишите правила дифференцирования с помощью функций $u(x)$ и $v(x)$.
5. Сформулируйте правило дифференцирования производной суммы.
6. Дайте определение сложной функции.
7. Запишите правило нахождения производной сложной функции.
8. Приведите пример сложной функции.

Литература:

1. Григорьев С.Г., Иволгина С.В., Математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования; под ред. В.А. Гусева. – 15-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2020г.
2. Богомолов Н.В., Самойленко П.И. Математика: учебник для СПО – 5-е изд. перераб. и доп. – М.: Юрайт, 2019г

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2

Нахождение неопределенных интегралов

Цель работы: закрепить навыки нахождения неопределенных интегралов различными способами, совершенствование умений проверять действие интегрирования дифференцированием.

Оборудование: методические указания по выполнению работы, таблица первообразных элементарных функций, таблица неопределенных интегралов.

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

1. Изучить краткие теоретические сведения;
2. Изучить схему решения задач
3. Оформить отчет по работе.

Содержание отчета:

1. Название практической работы, ее цель.
2. Основные теоретические сведения.
3. Выполненные задания в соответствии с данными своего варианта (не забывайте списывать само задание).
4. Ответы на контрольные вопросы
5. Вывод по практической работе.

Теоретическая часть:

Функция $F(x)$, определенная на интервале (a, b) , называется *первообразной* для функции $f(x)$, определенной на том же интервале (a, b) , если $F'(x) = f(x)$.

Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то любая другая первообразная $\Phi(x)$ для функции $f(x)$ отличается от $F(x)$ на некоторое постоянное слагаемое, т. е. $\Phi(x) = F(x) + C$, где C — const.

Пример: Для функции $f(x) = 3x^2 + 2x - 3$ найти первообразную, график которой проходит через точку $M(1; -2)$

РЕШЕНИЕ:

Найдем первообразную для данной функции $f(x) = 3x^2 + 2x - 3$.

$$F(x) = 3 \frac{x^{2+1}}{2+1} + 2 \frac{x^{1+1}}{1+1} - 3x = 3 \frac{x^3}{3} + 2 \frac{x^2}{2} - 3x = x^3 + x^2 - 3x + C$$

Подставляем в первообразную координаты точки M (вместо $F(x)$ подставляем -2 , вместо x подставляем 1). Получаем: $-2 = 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 + C$. Откуда $C = -1$.

Теперь в первообразную $F(x)$ вместо C подставим получившееся число, получаем

$$F(x) = x^3 + x^2 - 3x - 1.$$

Ответ: $F(x) = x^3 + x^2 - 3x - 1.$

Неопределенным интегралом функции $f(x)$ называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением: $F(x) + C$.

Записывают: $\int f(x) dx = F(x) + C$, где $F'(x) = f(x)$, $C — \text{const.}$

Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке. Операция нахождения первообразной для данной функции называется *интегрированием*. Интегрирование является обратной операцией к дифференцированию:

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x).$$

Для проверки правильности выполненного интегрирования необходимо продифференцировать результат интегрирования и сравнить полученную функцию с подынтегральной.

3. Основные свойства неопределенного интеграла

1. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$d \int f(x) dx = f(x) dx, \left(\int f(x) dx \right)' = f(x).$$

3. Неопределенный интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов этих функций:

$$\int [f(x) + \varphi(x)] dx = \int f(x) dx + \int \varphi(x) dx.$$

4. Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx.$$

5. Если $\int f(x) dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$ - любая известная функция, имеющая непрерывную производную, то $\int f(u) du = F(u) + C$.

Пример: $\int (x^2 - 2 \sin x + 1) dx = \int x^2 dx - 2 \int \sin x dx + \int dx = \frac{1}{3} x^3 + 2 \cos x + x + C;$

Таблица основных интегралов

1. $\int 0 du = C; \quad C = \text{const};$
2. $\int du = u + C;$
3. $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$ 3а. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C;$
4. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C;$
5. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C;$
6. $\int e^u du = e^u + C;$
7. $\int \cos u du = \sin u + C;$
8. $\int \sin u du = -\cos u + C;$
9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tgu} + C;$
10. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctgu} + C;$
11. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C;$
12. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C;$
13. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C;$
14. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C;$
15. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| + C;$
16. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C;$
17. $\int \operatorname{tgu} du = -\ln |\cos u| + C;$
18. $\int \operatorname{ctgu} du = \ln |\sin u| + C.$

Каждая из приведенных в таблице формул справедлива на промежутке, не содержащем точек разрыва подынтегральной функции. Вычисление интегралов с использованием таблицы и основных свойств называют непосредственным интегрированием.

Метод замены переменной

Теорема 1. Пусть $x = \varphi(t)$ монотонная, непрерывно дифференцируемая функция, тогда $\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (1)$

При этом, если $\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(t) + C$, то $\int f(x) dx = F(\psi(x)) + C$, где $\psi(x)$ — функция, обратная $\varphi(t)$.

Формула (1) называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

Алгоритм замены переменной:

1. Определяют, к какому табличному интегралу приводится данный интеграл.
2. Определяют, какую часть подынтегральной функции заменяют новой переменной и записывают эту замену.
3. Находят дифференциалы обеих частей замены и выражают дифференциал старой переменной через дифференциал новой переменной.
4. Производят замену под интегралом.
5. Находят полученный интеграл

Примеры решения заданий:

Пример 1. Проинтегрировать подходящей заменой переменной.

РЕШЕНИЕ:

$$a) \int \cos 4x dx = \left| \begin{array}{l} t = 4x \\ dt = (4x)' = 4dx \\ dx = \frac{dt}{4} \end{array} \right| = \int \cos t \frac{dt}{4} = \frac{1}{4} \int \cos t dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 7} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} =$$
$$= \frac{1}{4} \sin t + C = \frac{1}{4} \sin 4x + C.$$

$$б) \int e^{9x+1} dx = \left| \begin{array}{l} t = 9x+1 \\ dt = (9x+1)' = 9dx \\ dx = \frac{dt}{9} \end{array} \right| = \int e^t \frac{dt}{9} = \frac{1}{9} \int e^t dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 6} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} =$$
$$= \frac{1}{9} e^t + C = \frac{1}{9} e^{9x+1} + C.$$

$$в) \int x(2-x^2)^5 dx = \left| \begin{array}{l} t = 2-x^2 \\ dt = (2-x^2)' = -2x dx \\ x dx = \frac{dt}{-2} \end{array} \right| = \int t^5 \left(-\frac{dt}{2} \right) = -\frac{1}{2} \int t^5 dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 3} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} =$$
$$= -\frac{1}{2} \frac{t^6}{6} + C = -\frac{1}{12} (2-x^2)^6 + C.$$

Метод интегрирования по частям

Некоторые виды интегралов, вычисляемых по частям

Если производные функций $U = U(x)$ и $V = V(x)$ непрерывны, то справедлива формула: $\int U dV = UV - \int V dU$, называемая *формулой интегрирования по частям*. В качестве $U(x)$ обычно выбирают функцию, которая упрощается при дифференцировании.

Некоторые стандартные случаи функций, интегрируемых по частям, указаны в таблице 1. Там же дается способ выбора множителей U и dV .

Таблица 1

Вид интеграла	$U \rightarrow dU$	$dV \rightarrow V$
$\int P_n(x) \sin kx dx$ $\int P_n(x) \cos kx dx$ $\int P_n(x) e^{kx} dx$ $n = 1, 2, \dots$	$U = P_n(x) \rightarrow$ $\rightarrow dU = P_n'(x) dx$	$dV = \sin kx dx \rightarrow V = -\frac{1}{k} \cos kx$ $dV = \cos kx dx \rightarrow V = \frac{1}{k} \sin kx$ $dV = e^{kx} dx \rightarrow V = \frac{1}{k} e^{kx}$

Вид интеграла	$U \rightarrow dU$	$dV \rightarrow V$
$\int \ln kx P_n(x) dx$ $\int \arcsin kx P_n(x) dx$ $\int \arccos kx P_n(x) dx$ $\int \operatorname{arctg} kx P_n(x) dx$ $\int \operatorname{arcctg} kx P_n(x) dx$ $n = 0, 1, 2, \dots$	$U = \ln kx \rightarrow dU = \frac{dx}{x}$ $U = \arcsin kx \rightarrow dU = \frac{k dx}{\sqrt{1 - k^2 x^2}}$ $U = \arccos kx \rightarrow dU = -\frac{k dx}{\sqrt{1 - k^2 x^2}}$ $U = \operatorname{arctg} kx \rightarrow dU = \frac{k dx}{1 + k^2 x^2}$ $U = \operatorname{arcctg} kx \rightarrow dU = -\frac{k dx}{1 + k^2 x^2}$	$dV = P_n(x) dx \rightarrow$ $\rightarrow V = \int P_n(x) dx$

$P_n(x)$ — многочлен от x степени n , т. е. $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$, где $a_0 \neq 0$.

Пример 2. Проинтегрировать по частям.

а) $\int (3x - 1) \sin 2x dx$; б) $\int (1 + 2x) \ln x dx$.

РЕШЕНИЕ:

$$\begin{aligned}
 \text{а) } \int (3x-1) \sin 2x dx &= \left| \begin{array}{l} U = 3x-1 \rightarrow dU = 3dx \\ dV = \sin 2x dx \rightarrow V = -\frac{\cos 2x}{2} \end{array} \right| = (3x-1) \left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) + \int \frac{\cos 2x}{2} dx = \\
 &= -\frac{1}{2}(3x-1) \cos 2x + \frac{3}{2} \int \cos 2x dx = -\frac{1}{2}(3x-1) \cos 2x + \frac{3}{4} \sin 2x + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } \int (1+2x) \ln x dx &= \left| \begin{array}{l} U = \ln x \rightarrow dU = \frac{dx}{x} \\ dV = (1+2x) dx \rightarrow V = \int (1+2x) dx = x + x^2 \end{array} \right| = \ln x (x + x^2) - \int (x + x^2) \frac{dx}{x} = \\
 &= \ln x (x + x^2) - \int (1 + x) dx = \ln x (x + x^2) - x - \frac{x^2}{2} + C.
 \end{aligned}$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Задание 1: Найдите первообразную, график которой проходит через точку:

№ варианта	Задание для практической работы	№ варианта	Задание для практической работы
1	$f(x) = 5x + 4 \quad (-2; 3)$	16	$f(x) = 4 + 4x^3 \quad (1; 1)$
2	$f(x) = x^2 - 6 \quad (2; -1)$	17	$f(x) = x^2 + 2x \quad (5; 4)$
3	$f(x) = 5x^4 + 1 \quad (-1; 4)$	18	$f(x) = 9 + 7x \quad (-1; 9)$
4	$f(x) = 6x + 2 \quad (0; 3)$	19	$f(x) = 3x + 5 \quad (2; 1)$
5	$f(x) = 5 - 2x \quad (1; 1)$	20	$f(x) = 8x^3 - 1 \quad (-2; -1)$
6	$f(x) = 4x^3 - 7 \quad (-2; -2)$	21	$f(x) = 3 - x^3 \quad (2; 1)$
7	$f(x) = 2x^6 + 4x \quad (1; -3)$	22	$f(x) = 5x^4 + 4x \quad (0; 10)$
8	$f(x) = x^3 - 2x \quad (-1; 1)$	23	$f(x) = 2 - x \quad (4; 3)$
9	$f(x) = x + 8 \quad (-2; 4)$	24	$f(x) = 5x^4 + 4x^3 \quad (2; 2)$
10	$f(x) = 5x + 3x^2 \quad (3; 2)$	25	$f(x) = 5x - 3 \quad (-3; -3)$
11	$f(x) = 5 - 4x^3 \quad (-1; 0)$	26	$f(x) = 6x - 4 \quad (1; -1)$
12	$f(x) = 2x + 6 \quad (-4; 4)$	27	$f(x) = 2x^3 + x \quad (-2; 3)$
13	$f(x) = x - 10x^2 \quad (1; 5)$	28	$f(x) = x^2 - 6x \quad (3; 0)$
14	$f(x) = 3x - x^3 \quad (-2; 1)$	29	$f(x) = 15x^4 - 2 \quad (2; -2)$
15	$f(x) = 3 + x^3 \quad (2; -1)$	30	$f(x) = 7x - 4 \quad (-4; 4)$

Задание 2: Найдите неопределенный интеграл, результат проверьте дифференцированием

№ варианта	Задание для практической работы	№ варианта	Задание для практической работы
1	$\int (9x^6 - 2x^3 + 5x - 1) dx$ $\int \left(\frac{2}{\cos^2 x} - \frac{3}{\sin^2 x} \right) dx$	16	$\int (x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x^4) dx$ $\int (x + \cos x) dx$

2	$\int (3x^2 - 2\cos x)dx$ $\int (1 - 5x + 6x^5 - 7x^6)dx$	17	$\int (4x^3 + 2x - \sin x + 1)dx$ $\int (4x^3 + 2x - 5)dx$
3	$\int (4x - x^2)dx$ $\int (x^2 + 2\sin x + e^x)dx$	18	$\int (7 - 8x + 4x^3 - 6x^5)dx$ $\int (x - 5e^x)dx$
4	$\int (2e^t - 3\cos t)dt$ $\int (4x^2 + x^5 + 3)dx$	19	$\int (5x^4 - 4x^2 + 2x - 1)dx$ $\int (3x - \cos x)dx$
5	$\int (8x^3 + 4x - 7)dx$ $\int (5\sin x + 7x^3)dx$	20	$\int (5x^4 + 12x^2 + 2x^{11})dx$ $\int (1 + \cos x)dx$
6	$\int (\frac{16}{3}x^3 + 2x^2 + x)dx$ $\int (2e^t - 3\cos t)dt$	21	$\int (\frac{1}{x} + 3e^x)dx$ $\int (5x^3 - 2x^2 + 3x - 8)dx$
7	$\int (\frac{5}{3}x^4 - x^6 + 4x - 8)dx$ $\int (3x^2 - 2\cos x)dx$	22	$\int (3x^2 + 4x^3 + 2e^x - 10)dx$ $\int (3x^2 + 4x + \cos x)dx$
8	$\int (4\cos x + 2\sin x)dx$ $\int (4x^3 + 8x - 2)dx$	23	$\int (4x^3 + 2x + 2\sin x + \cos x + 1)dx$ $\int (5x^3 + 6x - 4)dx$
9	$\int (2x^3 - 5x^2 + 7x - 3)dx$ $\int (\frac{-3}{\cos^2 x} - \frac{2}{\sin^2 x} - 1)dx$	24	$\int (2x^3 + 15x^2 + \sin x - 3)dx$ $\int (4x^5 + 2x^2 + 3)dt$
10	$\int (5\sin x - 2\cos x + 3x^5 + 4x^7 + 7)dx$ $\int (2x^3 + 2x - 3)dx$	25	$\int (8x^4 - 3x^2 + 7x - 3)dx$ $\int (\frac{3}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x})dx$
11	$\int (6x^5 - 2x^3 + x - 1)dx$ $\int (2 - 3\sin x)dx$	26	$\int (10x^9 + \frac{2}{\cos^2 x})dx$ $\int (x^3 - 4\sin x)dx$
12	$\int (15x^4 - 12x^2 + 2)dx$ $\int (-3\sin x - \cos x)dx$	27	$\int (\frac{4}{x^2} - 2x^3 + 8x - 4)dx$ $\int (2\cos x + \sin x - 5)dx$
13	$\int (4x^4 + 3x^2 - 2x + 5)dx$ $\int (x^8 + e^x + 4\sin x)dx$	28	$\int (x^6 + \frac{1}{\sin^2 x})dx$ $\int (6x^3 - 3x^2 - 3x + 7)dx$
14	$\int (x^3 + 2x^2 - 5)dx$ $\int (\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{2}{\sin^2 x})dx$	29	$\int (x^5 + 7 - e^x - 1)dx$ $\int (\frac{3}{x} + \cos x - 4)dx$
15	$\int (x - 5e^x)dx$ $\int (6 - x - 2x^2 + 5x^4)dx$	30	$\int (-4\sin x - 2 - \cos x)dx$ $\int (8x^3 - 2x + 20x^{19})dx$

Задание 3: Найдите неопределенный интеграл

№ варианта	Задание для практической работы		
	Интегрирование с помощью таблицы	Интегрирование с помощью замены	Интегрирование по частям
1	$\int \frac{7-x+4x^2}{5x^2} dx$	$\int (2-3x)^4 dx$	$\int (x^2+4x-3)\sin x dx$
2	$\int x(5-x)^2 dx$	$\int (5+2x)^7 dx$	$\int (x+5)\sin x dx$
3	$\int \frac{7x^2-3x-1}{2x^2} dx$	$\int \frac{x^2 dx}{5x^3-1}$	$\int (6+5x)\ln x dx$
4	$\int \frac{4x^3-6x+2}{3x} dx$	$\int (6x-1)^5 dx$	$\int e^x \sin x dx$
5	$\int \frac{3-x+2x^4}{5x} dx$	$\int \frac{dx}{x \ln x}$	$\int (x^3+3)\sin x dx$
6	$\int ((2x^3-5x^2+7x-3)x) dx$	$\int \cos^7 x \cdot \sin x dx$	$\int (x^2+4x+1)\ln x dx$
7	$\int \frac{4x^4-3x^2+7}{5x} dx$	$\int \frac{dx}{1-4x^2}$	$\int (2x-9)\sin x dx$
8	$\int \frac{x^3-9x}{x-3} dx$	$\int (3-x)^{10} dx$	$\int (x^2-x+13)\cos x dx$
9	$\int \frac{2+\sin^2 x}{2\sin^2 x} dx$	$\int \sin 2x dx$	$\int (x^2-3)\cos x dx$
10	$\int ((x^2+2)(3-5x)) dx$	$\int \cos(7x-3) dx$	$\int x^2 \ln x dx$
11	$\int \frac{5x^3+7x^2-4x}{x} dx$	$\int (2x-1)\cos(x^2-x) dx$	$\int (x-3)\cos x dx$
12	$\int \frac{x^2-169}{x-13} dx$	$\int (5+4x)^3 dx$	$\int (x+2)\cos 4x dx$
13	$\int \frac{2+3\sin^2 x}{\sin^2 x} dx$	$\int e^{6x+5} dx$	$\int (7x+5)\ln x dx$
14	$\int ((3x^2-1)(2+x)) dx$	$\int \sin \frac{x}{2} dx$	$\int (x+5)\cos x dx$
15	$\int \frac{6x^3+8x^2+4x}{2x} dx$	$\int \sin(2-3x) dx$	$\int (x^2-x)\cos 3x dx$
16	$\int \frac{x^2-16}{x-4} dx$	$\int \cos 2x dx$	$\int (3x+2)\ln x dx$
17	$\int \frac{2\cos^2 v+1}{\cos^2 v} dv$	$\int e^{\sin x} \cos x dx$	$\int x e^{2x} dx$
18	$\int ((x^3-4)(x-5)) dx$	$\int \frac{dx}{5x+3}$	$\int x^2 \cos x dx$
19	$\int \frac{e^{2x}-e^x \sin x}{e^x} dx$	$\int \frac{x dx}{x^2-5}$	$\int \ln x dx$

20	$\int \frac{x^4 - 2x^2}{x^2} dx$	$\int \frac{dx}{e^{3x}}$	$\int (7x - 1) \cos x dx$
21	$\int ((x^2 + 2x - 7)x) dx$	$\int (8 - 3x)^9 dx$	$\int (6 - 5x) e^x dx$
22	$\int \frac{\sin 2x}{\sin x} dx$	$\int (5x - 1)^3$	$\int x^5 \cos x dx$
23	$\int \frac{3 - 5x + 6x^3}{2x^2} dx$	$\int \frac{e^x dx}{e^x + 7}$	$\int (1 + 2x) \cos x dx$
24	$\int \frac{\sin^2 t - 2}{\sin^2 t} dt$	$\int e^{1-3x} dx$	$\int (8x - 1) \sin 5x dx$
25	$\int \left(\frac{3x}{x^2} + 7 \right) dx$	$\int (2x^3 + 1)^4 x^2 dx$	$\int (3x + 7) e^x dx$
26	$\int ((2x^3 - 3x + 4x^2)x^2) dx$	$\int \sin (4 + 5x) dx$	$\int (2x + 3) \ln x dx$
27	$\int \frac{x^2 - 121}{x + 11} dx$	$\int (6x + 5)^7$	$\int (4 + 2x) e^x dx$
28	$\int \frac{x^3 + x^5}{x^2} dx$	$\int \cos(3 - 2x) dx$	$\int (4x + 5) \cos x dx$
29	$\int \frac{6x^4 - 2x + 8x^7}{2x^2} dx$	$\int e^{4+2x} dx$	$\int x^{15} \cos x dx$
30	$\int ((x + 10)(4x - 5)) dx$	$\int (2 - 11x)^5$	$\int (3x^2 + 4) \sin x dx$

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение первообразной функции.
2. Сколько первообразных имеется у непрерывной функции?
3. Чем отличается неопределенный интеграл от первообразной?
4. Какие методы нахождения неопределенных интегралов вы знаете?
5. В чем заключается суть метода замены переменной при вычислении неопределенных интегралов?
6. Запишите формулу нахождения неопределенного интеграла по частям.
7. Заполните таблицу:

Свойства неопределенного интеграла	№	Формула
Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции	1	
	2	$\int m f(x) dx = m \int f(x) dx$
Интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций	3	

Литература:

1. Колмогоров А.Н., Абрамов А.М., Дудницын Ю.П. и др; Под редакцией А.Н. Колмогорова, Алгебра и начала анализа: учебник для 10-11 классов общеобразоват. учреждений. – М.: «Просвещение», 2000г.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №3

Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

Цель занятия: закрепить навыки решения дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными.

Оборудование: таблицы с формулами дифференцирования и интегрирования; методические указания по выполнению работы.

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

1. Изучить краткие теоретические сведения;
2. Изучить схему решения задач
3. Оформить отчет по работе.

Содержание отчета:

1. Название практической работы, ее цель, оборудование, время выполнения.
2. Выполненные задания в соответствии с данными своего варианта (не забывайте записывать формулировку задания).
3. Ответы на контрольные вопросы
4. Вывод по практической работе.

Теоретическая часть:

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида:

$$F(x, y, y') = 0.$$

Дифференциальное уравнение первого порядка, содержит:

- 1) независимую переменную x ;
- 2) зависимую переменную y (функцию);
- 3) первую производную функции: y' (В дифференциальное уравнение первого порядка входит первая производная и не входят производные более высокого порядка).

В некоторых уравнениях 1-го порядка может отсутствовать «икс» или (и) «игрек», но это не существенно – **важно** чтобы в ДУ была первая производная y' , и **не было** производных высших порядков – y'' , y''' и т.д. Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок, входящих в него производных.

Дифференциальные уравнения 1-го порядка, определенные выше, удобно записывать в следующей форме: $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.

Решить дифференциальное уравнение – это значит, найти множество функций $y = f(x) + C$, которые удовлетворяют данному уравнению. Такое множество функций называется общим решением дифференциального уравнения. Если заданы начальные условия, то при их подстановке в общее решение находится постоянная величина C , а, соответственно, и *частное решение*. Таким образом, частное решение – это решение дифференциального уравнения, не содержащее произвольных постоянных.

Примечание: общее решение дифференциального уравнения можно записать не единственным способом. Таким образом, если у вас не совпал результат с заранее известным ответом, то это еще не значит, что вы неправильно решили уравнение.

Алгоритм решения дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными:

1. Производную функции переписать через её дифференциалы: $y' = \frac{dy}{dx}$
2. Разделить переменные.
3. Проинтегрировать обе части равенства, найти общее решение.
4. Если заданы начальные условия, найти частное решение, подставив начальные условия в общее решение дифференциального уравнения.

Примеры решения заданий:

Пример 1. Решить уравнение: а) $xy' = y$

РЕШЕНИЕ: а) Представим производную функции через дифференциалы: $y' = \frac{dy}{dx}$. Тогда

уравнение примет вид: $x \cdot \frac{dy}{dx} = y$. В рассматриваемом примере переменные легко

разделяются перекидыванием множителей по правилу пропорции: $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$

Переменные разделены. В левой части – только «игреки», в правой части – только «иксы».

Следующий этап – интегрирование дифференциального уравнения. Интегрируем обе части, это табличные интегралы:

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$. Получаем: $\ln |y| = \ln |x| + C$. К любой первообразной приписывается константа.

Здесь два интеграла, но константу C достаточно записать один раз (*т.к. константа + константа всё равно равна другой константе*). В большинстве случаев её помещают в правую часть.

Решение дифференциального уравнения в неявном виде называется общим интегралом

дифференциального уравнения. То есть, $\ln |y| = \ln |x| + C$ – это общий интеграл.

Вместо записи $\ln |y| = \ln |x| + C$ обычно пишут $\ln |y| = \ln |x| + \ln |C|$, т.е записываем C под логарифмом. Применяв свойство логарифмов, получаем: $\ln |y| = \ln |Cx|$. Откуда: $y = Cx$. Функция представлена в явном виде. Это и есть общее решение.

Ответ: $y = Cx$

б) $2yy' = 1 - 3x^2$ и найти его частное решение, если $y_0 = 3, x_0 = 1$.

РЕШЕНИЕ: Это—уравнение с разделенными переменными. Представим его в дифференциалах. Для этого перепишем данное уравнение в виде: $2y \frac{dy}{dx} = 1 - 3x^2$.

Отсюда $2ydy = (1 - 3x^2)dx$. Интегрируя обе части последнего равенства, найдем $\int 2ydy = \int (1 - 3x^2)dx$, т.е. $y^2 = x - x^3 + C$.

Подставив начальные значения $x_0 = 1$, $y_0 = 3$ найдем C : $3^2 = 1 - 1^3 + C$

$9 = 1 - 1 + C$, т.е. $C = 9$.

Ответ: $y^2 = x - x^3 + 9$.

Пример 2. Решить уравнение $\frac{yy'}{x} + e^y = 0$ при условии $y(1) = 0$.

$$\frac{ydy}{dx} + xe^y = 0, \quad ydy + xe^y dx = 0; \quad \frac{y}{e^y} dy = -x dx; \quad \int \frac{y}{e^y} dy = -\int x dx;$$

Интеграл, стоящий в левой части будем брать по частям ($\int u dv = uv - \int v du$).

$$\int ye^{-y} dy = \left\{ \begin{array}{l} u = y; \quad e^{-y} dy = dv; \\ du = dy; \quad v = -e^{-y}; \end{array} \right\} = -e^{-y} y - \int -e^{-y} dy = -e^{-y} y - e^{-y} = -e^{-y} (y + 1);$$

$$e^{-y} (y + 1) = \frac{x^2}{2} + C_0; \quad 2e^{-y} (y + 1) = x^2 + C$$

Если $y(1) = 0$, то $2e^0(0+1) = 1 + C$; $\Rightarrow 2 = 1 + C$; $\Rightarrow C = 1$; т.е. $2e^{-y}(y+1) = x^2 + 1$.

Ответ: $2e^{-y}(y+1) = x^2 + 1$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Задание 1: Найдите общие решения дифференциальных уравнений:

№ варианта	Задание для практической работы	№ варианта	Задание для практической работы
1	$y' = -2y$ $e^x dx + (y - 5)dy = 0$	16	$y' = \sin x + \cos x$ $y' = y(2e^x - x^3)$
2	$xy' - y = 0$ $y' = 2x + 3$	17	$4x - 3y^2 y' = 0$ $y' = 3x - \cos x$
3	$x^2 dx = 3y^2 dy$ $y' = \sin x$	18	$2xy' = y$ $y' = \cos 2x$
4	$x^2 y' + y = 0$ $y' = x + 2\sin x$	19	$(x + 2)dx - 2dy = 0$ $y' = \frac{e^x}{y^4}$
5	$3y - xy' = 0$ $y' = -2 + x + 4x^3$	20	$y' = \frac{-2x}{\cos y}$ $y' = 2 + 2x - 3x^2$
6	$y' \cdot y = e^x$ $3y^2 dy = 2x dx$	21	$xy' + y = 0$ $y' + y \sin x = 0$
7	$y' = \frac{4x}{\sin y}$ $xy' - y = 1$	22	$ydy - xdx = dx$ $y' = (3x^2 - e^x + \cos x)$
8	$y' = \sin x - 2x$ $yy' + x = 0$	23	$\sin x dx = -dy$ $y' = 3e^{2x}$

9	$y' - 2x = 1$ $\cos^2 x dy = \sin^2 y dx$	24	$2x dy - y dx = 0$ $y' - 7y = 0$
10	$y' = 5y$ $y' = \frac{3}{x}y$	25	$y' = 2xy$ $y' = \frac{\sqrt{y}}{x}$
11	$xyy' = 0,5$ $y' = y \sin x$	26	$y' = 2 + 3x$ $y' = \sin 3x$
12	$3x dy = 2y dx$ $y' = 2e^{4x}$	27	$y' = 4x + 5x^3$ $y' = 2x + \sin x$
13	$y' = y \cos x$ $x^2 y' = 2x$	28	$y' - 7x = 2$ $-2y^2 dy = -3x dx$
14	$y' = y$ $y' = y \cdot (x^2 + e^x)$	29	$y' = -7y$ $8x - 5y^4 y' = 0$
15	$y' = 2x^2 + 1$ $e^y dy - (x^3 + 7x) dx = 0$	30	$y' = \frac{6}{x}y$ $y' = 9e^{3x}$

Задание 2: Найдите частные решения уравнений, удовлетворяющие начальным условиям (N- номер варианта):

Четные номера вариантов	Нечетные номера вариантов
$y' = Nx^3 \quad y(0) = 0$	$y' = \frac{Ny}{x}, \quad y(3) = 6$
$\frac{dy}{x-N} = \frac{dx}{y-2} \quad y(0)=4$	$(N+y)dy=(1-x)dx, \quad y(-2)=3$
$Ny^2 dy = e^x dx, \quad y(0)=1$	$x dy = Ny dx, \quad y(2)=6$

Контрольные вопросы:

1. Что называется дифференциальным уравнением?
2. Что не может отсутствовать в дифференциальном уравнении с разделяющимися переменными?
3. Сколько произвольных постоянных содержится в общем решении дифференциального уравнения?
4. Какой вид имеет дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными?
5. Что называется частным решением дифференциального уравнения?
6. Запишите алгоритм решения дифференциальных уравнений первого порядка для нахождения частного решения?
7. Каков порядок производной в дифференциальных уравнениях второго порядка?
8. Что нужно знать и уметь, чтобы успешно решать дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными?

Литература:

1. Григорьев С.Г., Иволгина С.В., Математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования; под ред. В.А. Гусева. – 15-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2020г.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №4

Операции над множествами

Цель занятия: развитие практических навыков задания множеств, выполнения операций над множествами, применение к решению задач диаграмм Эйлера-Венна.

Оборудование: методические указания по выполнению работы.

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

1. Изучить краткие теоретические сведения;
2. Изучить схему решения задач
3. Оформить отчет по работе.

Содержание отчета:

1. Название практической работы, ее цель, оборудование, время выполнения.
2. Выполненные задания в соответствии с данными своего варианта (не забывайте записывать само задание).
3. Ответы на контрольные вопросы
4. Вывод по практической работе.

Теоретическая часть:

Под *множеством* понимается совокупность различных объектов, удовлетворяющих какому-то характеристическому свойству. Примеры: 1) множество студентов в данной аудитории; 2) множество действительных чисел; 3) множество корней квадратного уравнения $x^2 - 4 = 0$.

Объекты, составляющие множество, называются *элементами*. Тот факт, что объект x принадлежит множеству A , передается записью $x \in A$ (читается – «элемент x принадлежит множеству A »). Если x не является элементом A , то пишут $x \notin A$. Элементы множеств обычно обозначаются строчными латинскими буквами x, y, a, b, c ; множества часто обозначают прописными латинскими буквами A, B, C, X, Y .

Замечания:

- 1) во множестве элементы не повторяются;
- 2) элементы во множестве могут располагаться в любом порядке.

Если множество содержит конечное число элементов, то говорят, что оно *конечно*, в противном случае множество называется *бесконечным*. Если множество не содержит ни одного элемента, удовлетворяющего характеристическому свойству, оно называется *пустым множеством* и обозначается $\emptyset$. По определению пустое множество является конечным.

Множество B называется *подмножеством* множества A , если всякий элемент множества B является элементом множества A . По определению множество является подмножеством самого себя, $A \subseteq A$.

Пустое множество по определению является подмножеством любого множества.

Теорема. Число подмножеств конечного множества, состоящего из n элементов, равно 2^n .

Пример: Множество, состоящее из трех элементов a, b, c , имеет восемь (т.е. 2^3) подмножеств: $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{b; a\}, \{c\}, \{c; a\}, \{c; b\}, \{c; b; a\}$

Множества A и B называются *равными*, если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Обозначение: $A = B$.

Если все рассматриваемые в ходе рассуждений множества являются подмножествами некоторого фиксированного множества U , то это множество называют *универсальным* множеством (для рассматриваемого набора множеств).

Способы задания множеств:

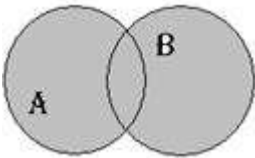
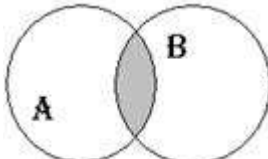
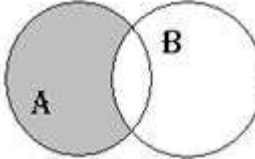
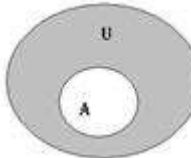
1. Перечислением своих элементов. $A = \{a, b, c, \dots\}$.

Например, запись $A = \{1, 5, 7\}$ задает множество A , которое состоит из трех элементов чисел 1, 5, 7.

2. Описание характеристического (общего) свойства его элементов.

Например, нечетные числа, не превышающие 10, задают множество $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

№	Операция	Обозначение	Графическое представление	Определение
1	Объединение множеств	$A \cup B$		множество, состоящее из всех элементов множеств A и B и только из них
2	Пересечение множеств	$A \cap B$		множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат одновременно каждому из множеств A и B .
3	Разность множеств	$A \setminus B$		множество, элементами которого являются элементы множества A , не принадлежащие множеству B (аналогично $B \setminus A$)
4	Дополнение множества	$\bar{A}$		множество, состоящее из всех элементов, не принадлежащих множеству A

Приоритет выполнения операций: сначала выполняются операции дополнения, затем пересечения и только потом объединения и разности. Операции объединения и разности считаются операциями одного приоритета и выполняются последовательно слева направо. Последовательность выполнения операций может быть изменена скобками.

Примеры решения заданий:

Пример 1. Найти объединение, пересечение и разность множеств A и B , если $A=\{1,2,3\}$, $B=\{3,4,5\}$.

РЕШЕНИЕ: $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$ $A \cap B = \{3\}$ $A \setminus B = \{1,2\}$ $B \setminus A = \{4,5\}$.

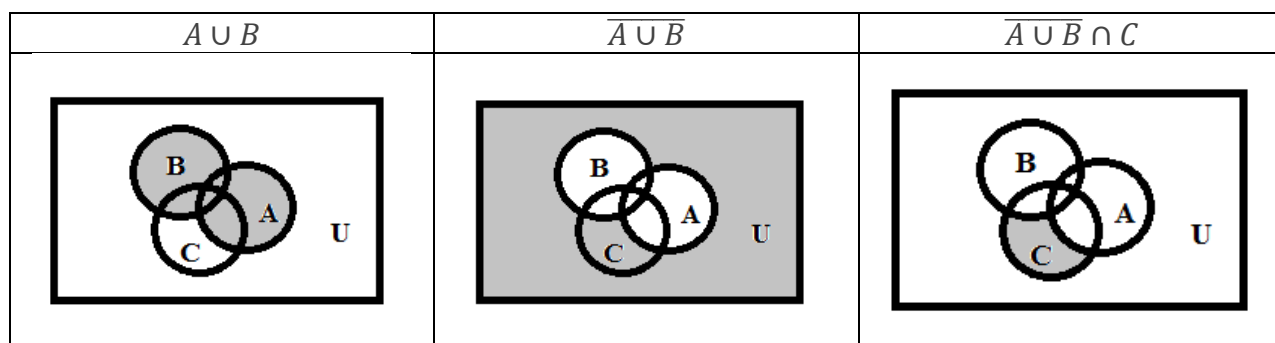
Пример 2. $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,0\}$, $A=\{1,5,6,8,0\}$, $B=\{2,3,4,5,6\}$, $C=\{4,6,7,8,9,0\}$. Выполните следующую операцию: $A \cup B \cap C \setminus \bar{C}$.

РЕШЕНИЕ: Учитывая приоритет выполнения операций над множествами, первым действием найдем $\bar{C} = \{1,2,3,5\}$. Следующей операцией найдем $B \cap C = \{4,6\}$. Операции объединения и разности – это операции одного приоритета и выполняются слева направо, поэтому сначала найдем объединение: $A \cup B \cap C = \{1,4,5,6,8,0\}$, Последним действием находим разность: $A \cup B \cap C \setminus \bar{C} = \{4,6,8,0\}$.

Ответ: $A \cup B \cap C \setminus \bar{C} = \{4,6,8,0\}$.

Пример 3. Пусть $A, B, C \subseteq U$. Изобразите с помощью диаграмм Эйлера-Венна: $\overline{A \cup B} \cap C$.

РЕШЕНИЕ: С учетом приоритета выполнения операций, изобразим сначала объединение множеств A и B , затем дополнение к объединению этих множеств, а затем пересечение с множеством C .



ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Задание 1: Запишите перечислением элементов следующие множества:

№ варианта	Задание для практической работы	№ варианта	Задание для практической работы
1	натуральные числа, меньшие 8	16	всех частей света;
2	натуральные делители числа 18	17	буквы слова «квадрат»
3	числа, модуль которых равен $\frac{2}{3}$	18	фамилии студентов, опоздавших сегодня на занятия
4	времена года	19	числа, модуль которых равен 1,7
5	предметы, изучаемые в I семестре этого года вашей специальности	20	двузначные числа, делящиеся на 10;
6	Материки планеты Земля	21	планеты Солнечной системы
7	числа, являющиеся степенями числа 3 и не превышающих 100	22	студенты вашей группы, чьи фамилии начинаются на «К»

8	буквы слова «математика»	23	дни недели
9	фамилии студентов, не явившихся сегодня на занятия	24	номера кабинетов находящиеся на втором этаже техникума
10	четные числа на отрезке $[1; 15]$	25	числа, являющиеся степенями числа 4 и не превышающих 200
11	Преподаватели (фамилии), ведущие предметы в вашей группе	26	числа на отрезке $[1; 75]$, делящиеся на 5
12	расписание уроков на сегодняшний день	27	зимние месяцы
13	числа, являющиеся степенями числа 2 и не превышающих 50	28	гласные буквы слова «гуталин»
14	натуральные числа, большие 10, но меньше 14	29	письменные принадлежности, лежащие в вашем портфеле
15	нечетные числа на отрезке $[1; 15]$	30	начинки пирожков, продаваемых сегодня в столовой

Задание 2: Найдите объединение, пересечение и разность множеств:

№ варианта	Задание для практической работы	№ варианта	Задание для практической работы
1	$C=\{3,4,5,6\}, B=\{0,1,2\}$	16	$A=\{2,4,6,8\}, B=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$
2	$A=\{6,7,8\}, B=\{7,8,9\}$	17	$K=\{1,2,3,4\}, L=\{3,4,7,0\}$
3	$A=\{1,2,5,8,6\}, B=\{1,2,3,4\}$	18	$A=\{3,4,6\}, B=\{5,6,7\}$
4	$A=\{2,3,4\}, B=\{4,5,6\}$	19	$C=\{-2,0,2,4\}, B=\{1,2,3\}$
5	$A=\{3,5,4\}, B=\{3,5,7\}$	20	$A=\{7,8,9\}, B=\{8,9,5\}$
6	$A=\{1,3,5\}, B=\{3,5,7,8,9\}$	21	$K=\{-2,-1,0,1,2,3\}, L=\{-2,-1,0\}$
7	$A=\{2,4,6\}, B=\{2,8,10\}$	22	$A=\{2,4,6,8\}, B=\{-2,0,2,4,6,8\}$
8	$A=\{-5,-3,-1\}, B=\{-3,-1\}$	23	$K=\{4,8,16\}, L=\{1,2,3\}$
9	$A=\{2,5,7,9\}, B=\{2,4,7\}$	24	$C=\{-5,-3,-1\}, B=\{-1,0,1\}$
10	$C=\{1,3,5,7,9\}, B=\{3,5,7\}$	25	$K=\{-10,-5,0,5,10\}, L=\{5,-3,8,0\}$
11	$A=\{4,6,8\}, B=\{7,8,9\}$	26	$M=\{32,1,8,12\}, T=\{12,0,32,5,7,8\}$
12	$A=\{-1,0,3,4\}, B=\{0,4,6\}$	27	$A=\{-2,-4,-6,8\}, B=\{-2,-4,6,-8\}$
13	$C=\{6,7,3,-5,2,6,6\}, B=\{3,5,7,6\}$	28	$C=\{0,2,4,6,10\}, B=\{3,5,6,7,10\}$
14	$A=\{1,4,9\}, B=\{4,5,6\}$	29	$K=\{-1,-4,10,55\}, L=\{5,-4,8,10\}$
15	$A=\{-3,0,3,6\}, B=\{-3,-2,-1\}$	30	$C=\{1,3,5,7,9\}, B=\{3,5,7\}$

Задание 3: Пусть $U = \{a, b, c, d, y, \kappa, x\}$, $X = \{a, c, x, y\}$, $Y = \{a, b, d, c, y\}$, $Z = \{b, c, y, \kappa\}$.

Найти множества:

№ варианта	Задание для практической работы	№ варианта	Задание для практической работы
1	$(X \cap Z) \cup \bar{Y}$	16	$X \cup (\bar{Y} \cap \bar{Z})$
2	$(X \cap \bar{Z}) \setminus Y \cap X$	17	$\bar{X} \cap \bar{Y} \cap Z$
3	$X \cap \bar{Y} \cup (Z \setminus X)$	18	$(X \cap Y \setminus \bar{Z}) \cap Y$
4	$(\bar{X} \cup \bar{Y}) \cap (X \cup \bar{Z})$	19	$(X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)$
5	$\bar{X} \cup (\bar{Y} \cap \bar{Z})$	20	$X \cup Y \setminus \bar{Z} \cap X$
6	$(X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$	21	$\bar{X} \cup \bar{Y} \setminus \bar{X} \cap Z$

7	$X \setminus \bar{Z} \cup Y \cap X$	22	$X \setminus \bar{Y} \cap Y \cup Z$
8	$(\bar{X} \cup \bar{Z}) \setminus Y$	23	$(X \cup Z \setminus Y) \cap \bar{Y}$
9	$X \cup Y \setminus \bar{Z} \cap Y$	24	$\bar{X} \setminus \bar{Y} \cup Z \cap X$
10	$\bar{X} \setminus \bar{Y} \cup (Y \cap Z)$	25	$\bar{X} \cup \bar{Y} \setminus Z$
11	$(X \cup Y \cap \bar{Z}) \cup Z$	26	$X \cap Y \cup \bar{Z} \cap \bar{X}$
12	$\bar{X} \cap \bar{Z} \cup \bar{Y} \cap Z$	27	$X \cup \bar{Z} \setminus Y \cap \bar{X}$
13	$(X \setminus Z \cap Y) \cap \bar{Z}$	28	$(X \cap Z \cap Y) \cup \bar{Z}$
14	$\bar{X} \cap \bar{Y} \cup \bar{Z}$	29	$(X \cup Y \cup \bar{Z}) \setminus Y$
15	$(X \setminus \bar{Z}) \cap (\bar{Y} \cup \bar{Z})$	30	$(X \cup Z \cup Y) \setminus \bar{Y}$

Задание 4: Пусть $A, B, C \subseteq U$. Изобразите с помощью диаграмм Эйлера-Венна:

№ варианта	Задание для практической работы	№ варианта	Задание для практической работы
1	$A \cup (B \cup C)$	16	$\bar{A} \cup B$
2	$(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$	17	$A \cup (B \cap C)$
3	$(C \cup A) \setminus (C \cap A)$	18	$A \cup (\bar{A} \cap B)$
4	$A \cap (B \cap C)$	19	$B \setminus \bar{A} \cup B$
5	$A \cup (\bar{A} \cap B)$	20	$\bar{A} \cup \bar{B}$
6	$A \setminus (B \cup C)$	21	$A \setminus (A \cap \bar{B})$
7	$\bar{A} \cup \bar{B}$	22	$(A \cup B) \cup C$
8	$A \cap (A \cup B)$	23	$\bar{B} \cup \bar{A} \cup C$
9	$\bar{C} \cup B$	24	$(\bar{A} \setminus B) \cup C$
10	$\bar{A} \cap \bar{B}$	25	$\bar{A} \cap \bar{B}$
11	$A \cap (B \setminus C)$	26	$\bar{A} \cap (B \cap C)$
12	$(A \cup B) \setminus (A \cap B)$	27	$A \cap (\bar{B} \setminus C)$
13	$B \cap \bar{A}$	28	$A \setminus (\bar{A} \cap \bar{B})$
14	$A \setminus (A \cap B)$	29	$A \setminus (B \cup \bar{C})$
15	$(A \cap B) \cap C$	30	$A \setminus (B \cap C)$

Контрольные вопросы:

1. Что такое множество?
2. Могут ли повторяться элементы во множестве?
3. Как обозначают пустое множество, универсальное?
4. Перечислите основные способы задания множеств.
5. Каков порядок расположения элементов в множестве?
6. Пустое множество- это конечное множество или бесконечное?
7. Дайте определение подмножества.
8. Приведите пример конечного множества и выделите из него два подмножества.
9. Какие операции можно осуществлять над множествами?
10. Запишите порядок выполнения операций: $X \setminus \bar{Y} \cap Y \cup Z$.
11. Какие множества называются равными?

12. Начертите два треугольника так, чтобы их пересечением: а) был треугольник; б) был отрезок; в) была точка.
13. Изобразите разность двух множеств.
14. Как изменить порядок выполнения операций над множествами?
15. О какой операции идет речь в следующих задачах: а) У Коли 10 книг, 2 книги он подарил товарищу. Сколько книг осталось у Коли? б) В зале было 100 стульев. После того как вынесли несколько стульев, в зале осталось 86 стульев. Сколько стульев вынесли из зала?

Литература:

1. Григорьев В.П., Дубинский Ю.А. Элементы высшей математики: Учеб. Для студ. Учреждений сред.проф. образования.- М.: Издательский центр «Академия», 2004г.
2. Григорьев С.Г., Иволгина С.В., Математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования; под ред. В.А. Гусева. – 15-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2020г.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №5

Построение графа по условиям ситуационных задач

Цель занятия: закрепить практические навыки построения графов по условию ситуационных задач, решения задач принятия решений, связанных с оптимизацией на графах.

Оборудование: методические указания по выполнению работы.

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

1. Изучить краткие теоретические сведения;
2. Изучить схему решения задач
3. Оформить отчет по работе.

Содержание отчета:

1. Название практической работы, ее цель, оборудование, время выполнения.
2. Выполненные задания в соответствии с данными своего варианта (не забывайте записывать само задание).
3. Ответы на контрольные вопросы
4. Вывод по практической работе.

Теоретическая часть:

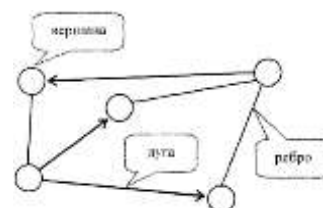
Один из разделов дискретной математики, часто используемый при принятии решений - теория графов.

Графом называют геометрическую схему, представляющую собой систему линий, связывающих какие-то заданные точки. Точки называются вершинами графа, а связывающие их линии - ребрами (или дугами). Вершины, которые не принадлежат ни одному ребру, называются *изолированными*. Две вершины, имеющие общее ребро называются *инцидентными (смежными)*. *Петлей* называется ребро, выходящее из вершины и входящее в нее же.

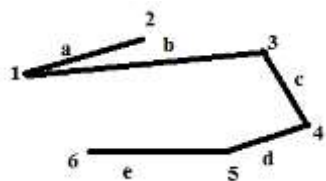
Граф называется *полным*, если каждые две различные вершины его соединены одним и только одним ребром, в противном случае, граф будет *неполным*.

Ребро графа называется *ориентированным ребром (дугой)*, если одну из его вершин считать началом, а другую — концом этого ребра.

Граф, у которого все ребра ориентированные, называется *ориентированным графом*. Ориентированный граф полезен, например, для иллюстрации организации перевозок в транспортной задаче. В экономике дугам ориентированного или обычного графа часто приписывают числа, например, стоимость проезда или перевозки груза из пункта А (начальная вершина дуги) в пункт Б (конечная вершина дуги).



Примеры решения заданий



Пример 1: Вычислите степени вершин неориентированного графа, составьте матрицы смежности и инцидентности.

РЕШЕНИЕ:

Степень вершин графа определяется числом ребер, инцидентных данной вершине, т.е. выходящих из нее: $\deg(1) =$

$2, \deg(2) = 1, \deg(3) = 2, \deg(4) = 2, \deg(5) = 2, \deg(6) = 1$

Построим матрицу смежности. Для этого составим таблицу, в столбцы и строки которой внесем вершины графа. Далее заполним таблицу: если вершины соединены между собой ребром, то ставим 1, если не соединены -0. Получившаяся таблица является матрицей смежности. Данная матрица является симметричной относительно главной диагонали.

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0
3	1	0	0	1	0	0
4	0	0	1	0	1	0
5	0	0	0	1	0	1
6	0	0	0	0	1	0

Теперь построим матрицу инцидентности. Для этого составим таблицу, в столбцы которой внесем ребра нашего графа, а в строки – вершины. Далее заполним таблицу: если вершины инцидентны ребру, то ставим 1, если не инцидентны -0. Получившаяся таблица является матрицей смежности.

	a	b	c	d	e
1	1	1	0	0	0
2	1	0	0	0	0
3	0	1	1	0	0
4	0	0	1	1	0
5	0	0	0	1	1
6	0	0	0	0	1

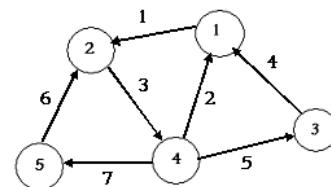
Пример 2: Составьте матрицы смежности и инцидентности ориентированного графа.

РЕШЕНИЕ: Построим матрицу смежности. Для этого составим таблицу, в столбцы и строки которой внесем вершины графа.

	1	2	3	4	5
1	0	0	1	1	0
2	1	0	0	0	1
3	0	0	0	1	0
4	0	1	0	0	0
5	0	0	0	1	0

Элемент матрицы смежности ориентированного графа определяется следующим образом:

1. равен единице, если из вершины в вершину входит дуга;
2. равен нулю, если из вершины в вершину дуга не входит.



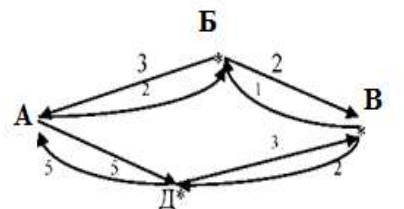
Матрица инцидентности графа с 5 вершинами и 7 дугами имеет 5 строк и 7 столбцов, строки соответствуют вершинам графа, а столбцы – дугам.

Причем для ориентированного графа элемент матрицы равен:

1. -1, если я вершина является началом дуги;
2. 1, если я вершина является концом дуги;
3. 0, если вершина и ребро не инцидентны.

	1	2	3	4	5	6	7
1	-1	1	0	1	0	0	0
2	1	0	-1	0	0	1	0
3	0	0	0	-1	1	0	0
4	0	-1	1	0	-1	0	-1
5	0	0	0	0	0	-1	1

Пример 3 (задача о коммивояжерах). Требуется



посетить все вершины графа и вернуться в исходную вершину, минимизировав затраты на проезд (или минимизировав время).

РЕШЕНИЕ: Построим граф по условию задачи:

Затраты на проезд приведены в таблице.

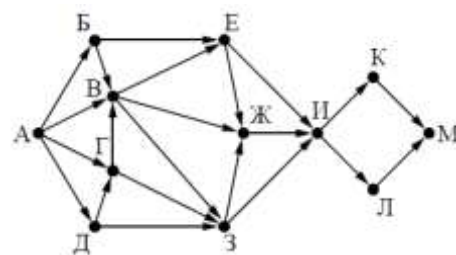
Город отправления	Город назначения	Затраты на проезд
А	Б	2
А	В	1
А	Д	5
Б	А	3
Б	В	2
Б	Д	1
В	А	4
В	Б	1
В	Д	2
Д	А	5
Д	Б	3
Д	В	3

Возможные варианты маршрутов, затем запишем затраты для каждого участка и подсчитаем итоговые затраты для всего маршрута. Маршрут, имеющий минимальные затраты и будет искомым решением

А - Б - В - Д - А	$2 + 2 + 3 + 5 = 12$
А - В - Д - Б - А	$1 + 2 + 3 + 3 = 9$
А - Б - Д - В - А	$2 + 1 + 3 + 4 = 10$
А - Д - Б - В - А	$5 + 3 + 2 + 4 = 14$
А - В - Б - Д - А	$1 + 1 + 1 + 5 = 8$
А - Д - В - Б - А	$5 + 2 + 1 + 3 = 11$

Ответ: Маршрут А - В - Б - Д - А с минимальными затратами, равными 8.

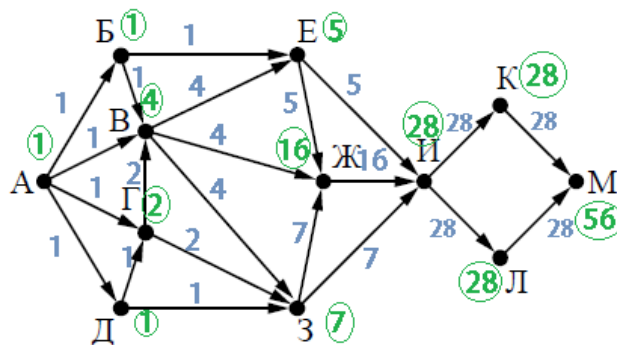
Пример 4. На рисунке представлена схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И, К, Л, М. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город М?



РЕШЕНИЕ: на рисунке в кружочке отмечено количество маршрутов в каждый пункт. А цифры на дугах обозначены для более легкого сложения и нахождения конечного результата.

Начинаем считать пути из пункта А=1.

Из пункта А идут пути в пункты Б, В, Г, Д → рисуем из пункта А на дугах единицы к четырем путям. Определяем, что в пункты Б и Д проложен единственный маршрут из пункта А, следует, что у этих двух пунктов количество = 1.



В пункт Г маршруты исходят из пунктов А и Д, которые равны единице, следует что количество маршрутов в пункте Г = 1+1.

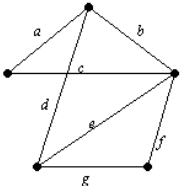
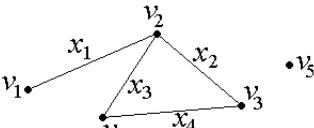
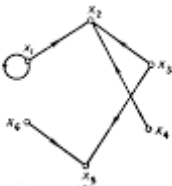
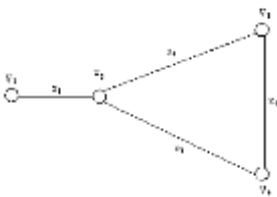
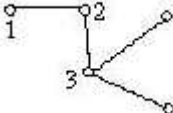
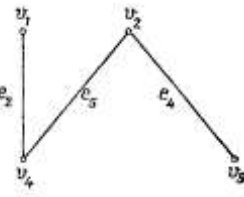
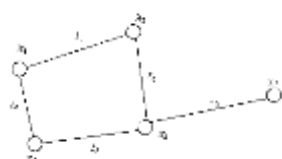
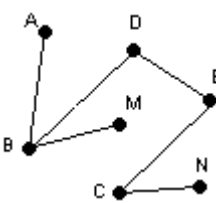
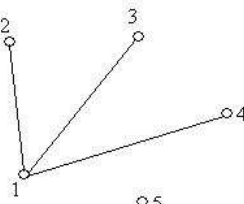
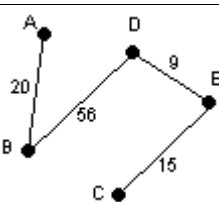
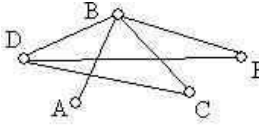
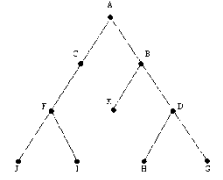
В пункт В маршруты исходят из пунктов А,Б,Г. Складываем значения количеств маршрутов каждого пункта $\rightarrow 1+1+2=4$. Аналогичным образом рассматриваем все маршруты.

Ответ: 56

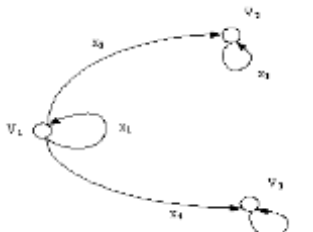
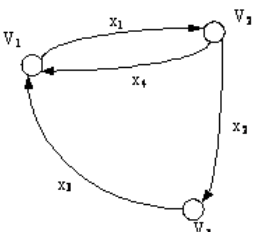
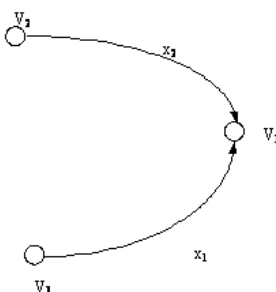
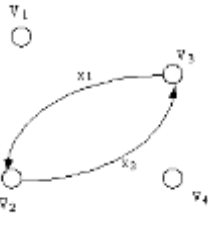
ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

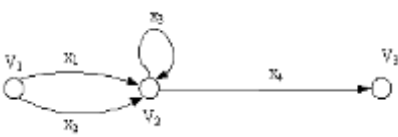
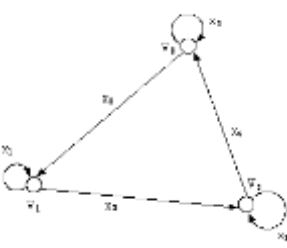
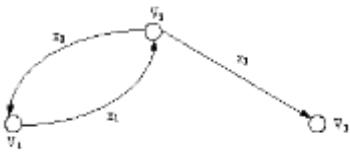
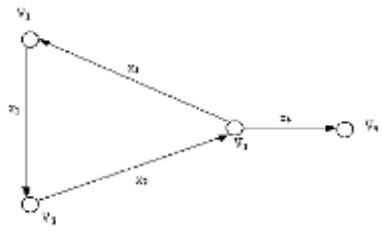
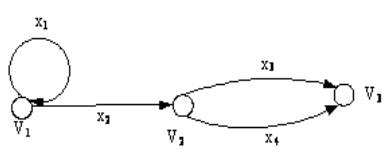
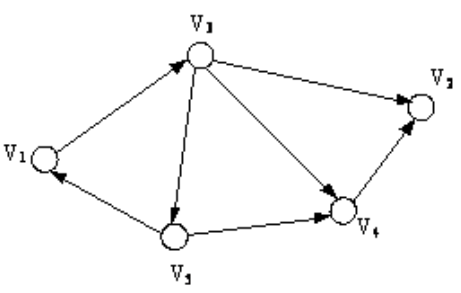
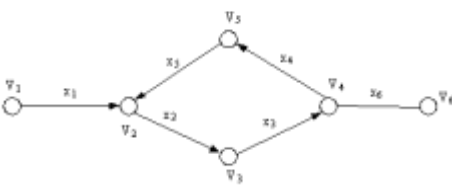
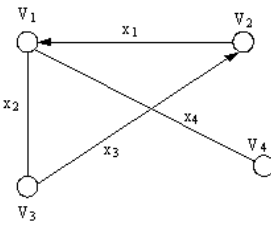
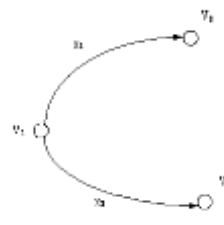
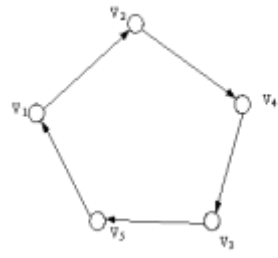
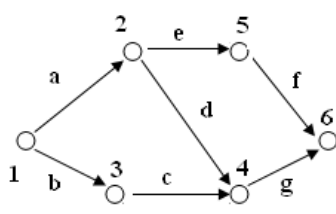
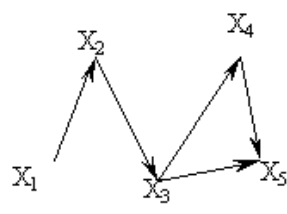
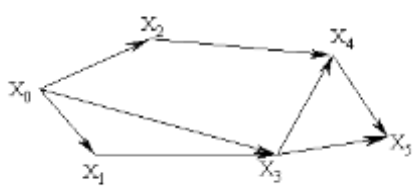
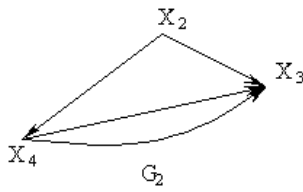
Задание1. Вычислите степени вершин неориентированного графа, составьте матрицы смежности и инцидентности.

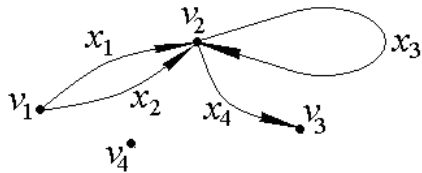
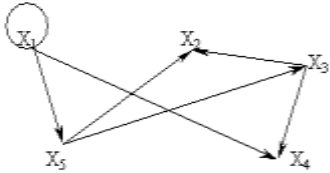
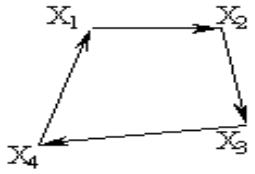
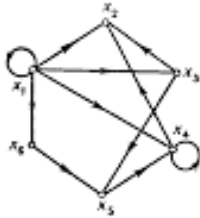
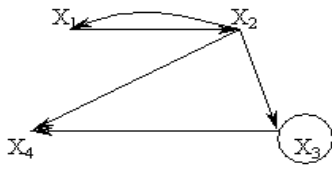
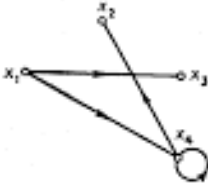
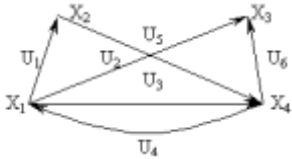
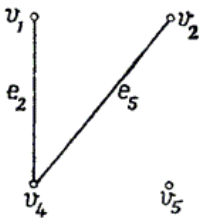
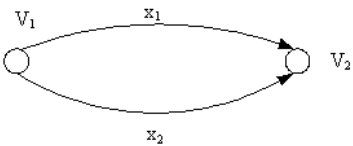
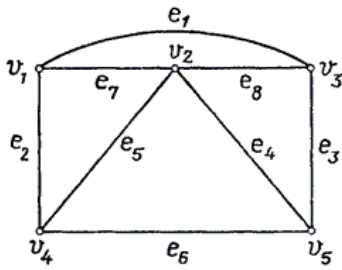
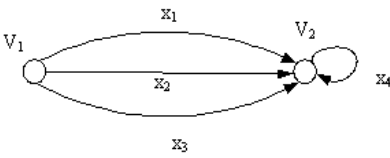
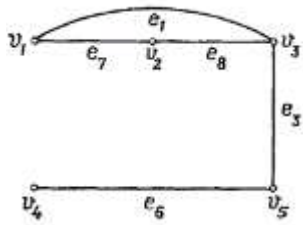
№ варианта	Задание для практической работы	№ варианта	Задание для практической работы	№ варианта	Задание для практической работы
1		11		21	
2		12		22	
3		13		23	
4		14		24	
5		15		25	
6		16		26	

7		17		27	
8		18		28	
9		19		29	
10		20		30	

Задание 2. Составьте матрицы смежности и инцидентности ориентированного графа.

№ варианта	Задание для практической работы	№ варианта	Задание для практической работы
1		16	
2		17	

3		18	
4		19	
5		20	
6		21	
7		22	
8		23	
9		24	

10		25	
11		26	
12		27	
13		28	
14		29	
15		30	

Задание 3. Между населёнными пунктами А, В, С, D, Е, F построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. (Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет). Определите длину кратчайшего пути между пунктами А и F.

№ варианта	Задание для практической работы	№ варианта	Задание для практической работы
---------------	---------------------------------	---------------	---------------------------------

1	<table><tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td><td>F</td></tr><tr><td>A</td><td></td><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>B</td><td>4</td><td></td><td>6</td><td>3</td><td>6</td><td></td></tr><tr><td>C</td><td></td><td>6</td><td></td><td></td><td>4</td><td></td></tr><tr><td>D</td><td></td><td>3</td><td></td><td></td><td>2</td><td></td></tr><tr><td>E</td><td></td><td>6</td><td>4</td><td>2</td><td></td><td>5</td></tr><tr><td>F</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>5</td><td></td></tr></table>		A	B	C	D	E	F	A		4					B	4		6	3	6		C		6			4		D		3			2		E		6	4	2		5	F					5		16	<table><tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td><td>F</td></tr><tr><td>A</td><td></td><td>6</td><td>1</td><td></td><td>3</td><td></td></tr><tr><td>B</td><td>6</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>C</td><td>1</td><td></td><td></td><td>2</td><td>5</td><td>4</td></tr><tr><td>D</td><td></td><td></td><td>2</td><td></td><td>4</td><td></td></tr><tr><td>E</td><td>3</td><td></td><td>5</td><td>4</td><td></td><td></td></tr><tr><td>F</td><td></td><td></td><td>4</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		A	B	C	D	E	F	A		6	1		3		B	6						C	1			2	5	4	D			2		4		E	3		5	4			F			4																		
		A	B	C	D	E	F																																																																																																													
	A		4																																																																																																																	
	B	4		6	3	6																																																																																																														
	C		6			4																																																																																																														
	D		3			2																																																																																																														
	E		6	4	2		5																																																																																																													
F					5																																																																																																															
	A	B	C	D	E	F																																																																																																														
A		6	1		3																																																																																																															
B	6																																																																																																																			
C	1			2	5	4																																																																																																														
D			2		4																																																																																																															
E	3		5	4																																																																																																																
F			4																																																																																																																	
2	<table><tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td><td>F</td></tr><tr><td>A</td><td></td><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>B</td><td>4</td><td></td><td>2</td><td></td><td>8</td><td>3</td></tr><tr><td>C</td><td></td><td>2</td><td></td><td>2</td><td>3</td><td></td></tr><tr><td>D</td><td></td><td></td><td>2</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>E</td><td></td><td>8</td><td>3</td><td></td><td></td><td>4</td></tr><tr><td>F</td><td></td><td>3</td><td></td><td></td><td>4</td><td></td></tr></table>		A	B	C	D	E	F	A		4					B	4		2		8	3	C		2		2	3		D			2				E		8	3			4	F		3			4		17	<table><tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td><td>F</td><td>G</td></tr><tr><td>A</td><td></td><td>2</td><td></td><td>6</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>B</td><td>2</td><td></td><td>5</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>C</td><td></td><td>5</td><td></td><td>4</td><td></td><td></td><td>8</td></tr><tr><td>D</td><td>6</td><td>2</td><td>4</td><td></td><td>2</td><td>7</td><td></td></tr><tr><td>E</td><td></td><td></td><td></td><td>2</td><td></td><td></td><td>5</td></tr><tr><td>F</td><td></td><td></td><td></td><td>7</td><td></td><td></td><td>7</td></tr><tr><td>G</td><td></td><td></td><td>8</td><td></td><td>5</td><td>7</td><td></td></tr></table>		A	B	C	D	E	F	G	A		2		6				B	2		5	2				C		5		4			8	D	6	2	4		2	7		E				2			5	F				7			7	G			8		5	7	
		A	B	C	D	E	F																																																																																																													
	A		4																																																																																																																	
	B	4		2		8	3																																																																																																													
	C		2		2	3																																																																																																														
	D			2																																																																																																																
	E		8	3			4																																																																																																													
F		3			4																																																																																																															
	A	B	C	D	E	F	G																																																																																																													
A		2		6																																																																																																																
B	2		5	2																																																																																																																
C		5		4			8																																																																																																													
D	6	2	4		2	7																																																																																																														
E				2			5																																																																																																													
F				7			7																																																																																																													
G			8		5	7																																																																																																														
3	<table><tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td><td>F</td></tr><tr><td>A</td><td></td><td>2</td><td>4</td><td>8</td><td></td><td></td></tr><tr><td>B</td><td>2</td><td></td><td></td><td>3</td><td></td><td>6</td></tr><tr><td>C</td><td>4</td><td></td><td></td><td>3</td><td></td><td></td></tr><tr><td>D</td><td>8</td><td>3</td><td>3</td><td></td><td>5</td><td>3</td></tr><tr><td>E</td><td></td><td></td><td></td><td>5</td><td></td><td>5</td></tr><tr><td>F</td><td></td><td>6</td><td></td><td>3</td><td>5</td><td></td></tr></table>		A	B	C	D	E	F	A		2	4	8			B	2			3		6	C	4			3			D	8	3	3		5	3	E				5		5	F		6		3	5		18	<table><tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td><td>F</td></tr><tr><td>A</td><td></td><td>6</td><td>3</td><td></td><td>4</td><td></td></tr><tr><td>B</td><td>6</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>7</td></tr><tr><td>C</td><td>3</td><td></td><td></td><td>2</td><td>5</td><td>3</td></tr><tr><td>D</td><td></td><td></td><td>2</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>E</td><td>4</td><td></td><td>5</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>F</td><td></td><td>7</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		A	B	C	D	E	F	A		6	3		4		B	6					7	C	3			2	5	3	D			2				E	4		5				F		7	3																		
		A	B	C	D	E	F																																																																																																													
	A		2	4	8																																																																																																															
	B	2			3		6																																																																																																													
	C	4			3																																																																																																															
	D	8	3	3		5	3																																																																																																													
	E				5		5																																																																																																													
F		6		3	5																																																																																																															
	A	B	C	D	E	F																																																																																																														
A		6	3		4																																																																																																															
B	6					7																																																																																																														
C	3			2	5	3																																																																																																														
D			2																																																																																																																	
E	4		5																																																																																																																	
F		7	3																																																																																																																	
4	<table><tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td><td>F</td><td>G</td></tr><tr><td>A</td><td></td><td>2</td><td></td><td>6</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>B</td><td>2</td><td></td><td>5</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>C</td><td></td><td>5</td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td>8</td></tr><tr><td>D</td><td>6</td><td>3</td><td>1</td><td></td><td>9</td><td>7</td><td></td></tr><tr><td>E</td><td></td><td></td><td></td><td>9</td><td></td><td></td><td>5</td></tr><tr><td>F</td><td></td><td></td><td></td><td>7</td><td></td><td></td><td>7</td></tr><tr><td>G</td><td></td><td></td><td>8</td><td></td><td>5</td><td>7</td><td></td></tr></table>		A	B	C	D	E	F	G	A		2		6				B	2		5	3				C		5		1			8	D	6	3	1		9	7		E				9			5	F				7			7	G			8		5	7		19	<table><tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td><td>F</td></tr><tr><td>A</td><td></td><td>4</td><td>7</td><td>1</td><td></td><td>8</td></tr><tr><td>B</td><td>4</td><td></td><td></td><td>6</td><td>5</td><td></td></tr><tr><td>C</td><td>7</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>5</td></tr><tr><td>D</td><td>1</td><td>6</td><td></td><td></td><td>3</td><td></td></tr><tr><td>E</td><td></td><td>5</td><td></td><td>3</td><td></td><td>4</td></tr><tr><td>F</td><td>8</td><td></td><td>5</td><td></td><td>4</td><td></td></tr></table>		A	B	C	D	E	F	A		4	7	1		8	B	4			6	5		C	7					5	D	1	6			3		E		5		3		4	F	8		5		4	
		A	B	C	D	E	F	G																																																																																																												
	A		2		6																																																																																																															
	B	2		5	3																																																																																																															
	C		5		1			8																																																																																																												
	D	6	3	1		9	7																																																																																																													
	E				9			5																																																																																																												
F				7			7																																																																																																													
G			8		5	7																																																																																																														
	A	B	C	D	E	F																																																																																																														
A		4	7	1		8																																																																																																														
B	4			6	5																																																																																																															
C	7					5																																																																																																														
D	1	6			3																																																																																																															
E		5		3		4																																																																																																														
F	8		5		4																																																																																																															

5	<table><tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td><td>F</td></tr><tr><td>A</td><td></td><td>2</td><td></td><td>8</td><td>3</td><td></td></tr><tr><td>B</td><td>2</td><td></td><td></td><td>3</td><td></td><td>6</td></tr><tr><td>C</td><td></td><td></td><td></td><td>3</td><td></td><td></td></tr><tr><td>D</td><td>8</td><td>3</td><td>3</td><td></td><td>5</td><td>3</td></tr><tr><td>E</td><td>3</td><td></td><td></td><td>5</td><td></td><td>4</td></tr><tr><td>F</td><td></td><td>6</td><td></td><td>3</td><td>4</td><td></td></tr></table>		A	B	C	D	E	F	A		2		8	3		B	2			3		6	C				3			D	8	3	3		5	3	E	3			5		4	F		6		3	4		20	<table><tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td><td>F</td></tr><tr><td>A</td><td></td><td></td><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>B</td><td></td><td></td><td>9</td><td></td><td>4</td><td></td></tr><tr><td>C</td><td>3</td><td>9</td><td></td><td>3</td><td>8</td><td></td></tr><tr><td>D</td><td></td><td></td><td>3</td><td></td><td>2</td><td></td></tr><tr><td>E</td><td></td><td>4</td><td>8</td><td>2</td><td></td><td>7</td></tr><tr><td>F</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>7</td><td></td></tr></table>		A	B	C	D	E	F	A			3				B			9		4		C	3	9		3	8		D			3		2		E		4	8	2		7	F					7																
	A	B	C	D	E	F																																																																																																														
A		2		8	3																																																																																																															
B	2			3		6																																																																																																														
C				3																																																																																																																
D	8	3	3		5	3																																																																																																														
E	3			5		4																																																																																																														
F		6		3	4																																																																																																															
	A	B	C	D	E	F																																																																																																														
A			3																																																																																																																	
B			9		4																																																																																																															
C	3	9		3	8																																																																																																															
D			3		2																																																																																																															
E		4	8	2		7																																																																																																														
F					7																																																																																																															
6	<table><tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td><td>F</td><td>G</td></tr><tr><td>A</td><td></td><td>2</td><td></td><td></td><td>6</td><td></td><td></td></tr><tr><td>B</td><td>2</td><td></td><td>1</td><td>9</td><td>3</td><td></td><td></td></tr><tr><td>C</td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>6</td></tr><tr><td>D</td><td></td><td>9</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>9</td></tr><tr><td>E</td><td>6</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td>5</td><td>4</td></tr><tr><td>F</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>5</td><td></td><td>7</td></tr><tr><td>G</td><td></td><td></td><td>6</td><td>9</td><td>4</td><td>7</td><td></td></tr></table>		A	B	C	D	E	F	G	A		2			6			B	2		1	9	3			C		1					6	D		9					9	E	6	3				5	4	F					5		7	G			6	9	4	7		21	<table><tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td><td>F</td></tr><tr><td>A</td><td></td><td>2</td><td></td><td></td><td>4</td><td>4</td></tr><tr><td>B</td><td>2</td><td></td><td>4</td><td></td><td></td><td>1</td></tr><tr><td>C</td><td></td><td>4</td><td></td><td>2</td><td>1</td><td></td></tr><tr><td>D</td><td></td><td></td><td>2</td><td></td><td></td><td>2</td></tr><tr><td>E</td><td>4</td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>F</td><td>4</td><td>1</td><td></td><td>2</td><td></td><td></td></tr></table>		A	B	C	D	E	F	A		2			4	4	B	2		4			1	C		4		2	1		D			2			2	E	4		1				F	4	1		2		
	A	B	C	D	E	F	G																																																																																																													
A		2			6																																																																																																															
B	2		1	9	3																																																																																																															
C		1					6																																																																																																													
D		9					9																																																																																																													
E	6	3				5	4																																																																																																													
F					5		7																																																																																																													
G			6	9	4	7																																																																																																														
	A	B	C	D	E	F																																																																																																														
A		2			4	4																																																																																																														
B	2		4			1																																																																																																														
C		4		2	1																																																																																																															
D			2			2																																																																																																														
E	4		1																																																																																																																	
F	4	1		2																																																																																																																
7	<table><tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td><td>F</td><td>G</td></tr><tr><td>A</td><td></td><td>8</td><td></td><td></td><td>6</td><td></td><td></td></tr><tr><td>B</td><td>8</td><td></td><td>2</td><td>9</td><td>3</td><td></td><td></td></tr><tr><td>C</td><td></td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>5</td></tr><tr><td>D</td><td></td><td>9</td><td></td><td></td><td>4</td><td></td><td>9</td></tr><tr><td>E</td><td>6</td><td>3</td><td></td><td>4</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>F</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>7</td></tr><tr><td>G</td><td></td><td></td><td>5</td><td>9</td><td></td><td>7</td><td></td></tr></table>		A	B	C	D	E	F	G	A		8			6			B	8		2	9	3			C		2					5	D		9			4		9	E	6	3		4				F							7	G			5	9		7		22	<table><tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td><td>F</td></tr><tr><td>A</td><td></td><td>4</td><td>1</td><td></td><td></td><td>8</td></tr><tr><td>B</td><td>4</td><td></td><td>4</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>C</td><td>1</td><td>4</td><td></td><td>7</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>D</td><td></td><td></td><td>7</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>E</td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td>5</td></tr><tr><td>F</td><td>8</td><td></td><td>2</td><td></td><td>5</td><td></td></tr></table>		A	B	C	D	E	F	A		4	1			8	B	4		4				C	1	4		7	1	2	D			7				E			1			5	F	8		2		5	
	A	B	C	D	E	F	G																																																																																																													
A		8			6																																																																																																															
B	8		2	9	3																																																																																																															
C		2					5																																																																																																													
D		9			4		9																																																																																																													
E	6	3		4																																																																																																																
F							7																																																																																																													
G			5	9		7																																																																																																														
	A	B	C	D	E	F																																																																																																														
A		4	1			8																																																																																																														
B	4		4																																																																																																																	
C	1	4		7	1	2																																																																																																														
D			7																																																																																																																	
E			1			5																																																																																																														
F	8		2		5																																																																																																															
8	<table><tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td><td>F</td></tr><tr><td>A</td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td>4</td><td>9</td></tr><tr><td>B</td><td></td><td></td><td>4</td><td></td><td></td><td>5</td></tr><tr><td>C</td><td></td><td>4</td><td></td><td>2</td><td>1</td><td></td></tr><tr><td>D</td><td>1</td><td></td><td>2</td><td></td><td></td><td>2</td></tr><tr><td>E</td><td>4</td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>F</td><td>9</td><td>5</td><td></td><td>2</td><td></td><td></td></tr></table>		A	B	C	D	E	F	A				1	4	9	B			4			5	C		4		2	1		D	1		2			2	E	4		1				F	9	5		2			23	<table><tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td><td>F</td></tr><tr><td>A</td><td></td><td>3</td><td>7</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>B</td><td>3</td><td></td><td>7</td><td>4</td><td>7</td><td></td></tr><tr><td>C</td><td>7</td><td>7</td><td></td><td></td><td>5</td><td></td></tr><tr><td>D</td><td></td><td>4</td><td></td><td></td><td>2</td><td></td></tr><tr><td>E</td><td></td><td>7</td><td>5</td><td>2</td><td></td><td>3</td></tr><tr><td>F</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>3</td><td></td></tr></table>		A	B	C	D	E	F	A		3	7				B	3		7	4	7		C	7	7			5		D		4			2		E		7	5	2		3	F					3																
	A	B	C	D	E	F																																																																																																														
A				1	4	9																																																																																																														
B			4			5																																																																																																														
C		4		2	1																																																																																																															
D	1		2			2																																																																																																														
E	4		1																																																																																																																	
F	9	5		2																																																																																																																
	A	B	C	D	E	F																																																																																																														
A		3	7																																																																																																																	
B	3		7	4	7																																																																																																															
C	7	7			5																																																																																																															
D		4			2																																																																																																															
E		7	5	2		3																																																																																																														
F					3																																																																																																															

9		A	B	C	D	E	F
	A		4	1			
	B	4		3			
	C	1	3		9	1	2
	D			9			3
	E			1			9
	F			2	3	9	
24		A	B	C	D	E	F
	A		3	4	7		2
	B	3			5		
	C	4			4		
	D	7	5	4		5	1
	E				5		4
	F	2			1	4	

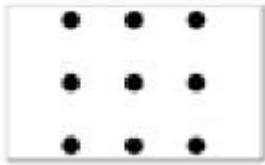
10		A	B	C	D	E	F	G
	A		6	1	3			
	B	6	2				4	8
	C	1			3	2		3
	D	3		3	2			
	E			2		6	2	
	F		4			2		7
	G	3	8	3			7	
25		A	B	C	D	E	F	
	A			3	4		7	
	B				2	5	4	
	C	3		4	1			
	D	4	2	1				
	E		5				2	
	F	7	4			2		

11		A	B	C	D	E	F	
	A		3	2	2			
	B	3		3		4	2	
	C	2	3		9	2	2	
	D	2		9			3	
	E		4	2				
	F		2	2	3			
26		A	B	C	D	E	F	G
	A	2		1			3	
	B			2	4	7		
	C	1	2				8	
	D		4			2		1
	E		7		2			5
	F	3		8				
	G				1	5		

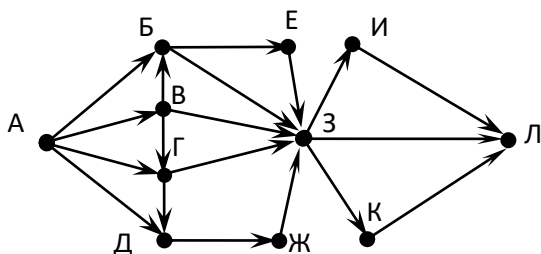
12		A	B	C	D	E	F
	A		2			9	
	B	2		1	3	8	
	C		1			4	
	D		3			2	
	E	9	8	4	2		6
	F					6	
27		A	B	C	D	E	F
	A			3			
	B			9		4	
	C	3	9		3	8	
	D			3		2	
	E		4	8	2		7
	F					7	

13	<table><tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td><td>F</td></tr><tr><td>A</td><td></td><td>3</td><td>2</td><td>6</td><td></td><td>4</td></tr><tr><td>B</td><td>3</td><td></td><td></td><td>5</td><td></td><td></td></tr><tr><td>C</td><td>2</td><td></td><td></td><td>2</td><td></td><td></td></tr><tr><td>D</td><td>6</td><td>5</td><td>2</td><td></td><td>8</td><td>1</td></tr><tr><td>E</td><td></td><td></td><td></td><td>8</td><td></td><td>2</td></tr><tr><td>F</td><td>4</td><td></td><td></td><td>1</td><td>2</td><td></td></tr></table>		A	B	C	D	E	F	A		3	2	6		4	B	3			5			C	2			2			D	6	5	2		8	1	E				8		2	F	4			1	2		28	<table><tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td><td>F</td></tr><tr><td>A</td><td>1</td><td>3</td><td></td><td></td><td>3</td><td></td></tr><tr><td>B</td><td>3</td><td></td><td></td><td>2</td><td></td><td>4</td></tr><tr><td>C</td><td></td><td></td><td>3</td><td></td><td>2</td><td></td></tr><tr><td>D</td><td></td><td>2</td><td></td><td></td><td>4</td><td></td></tr><tr><td>E</td><td>3</td><td></td><td>2</td><td>4</td><td></td><td>7</td></tr><tr><td>F</td><td></td><td>4</td><td></td><td></td><td>7</td><td>6</td></tr></table>		A	B	C	D	E	F	A	1	3			3		B	3			2		4	C			3		2		D		2			4		E	3		2	4		7	F		4			7	6
		A	B	C	D	E	F																																																																																														
	A		3	2	6		4																																																																																														
	B	3			5																																																																																																
	C	2			2																																																																																																
	D	6	5	2		8	1																																																																																														
	E				8		2																																																																																														
	F	4			1	2																																																																																															
	A	B	C	D	E	F																																																																																															
A	1	3			3																																																																																																
B	3			2		4																																																																																															
C			3		2																																																																																																
D		2			4																																																																																																
E	3		2	4		7																																																																																															
F		4			7	6																																																																																															
14	<table><tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td><td>F</td></tr><tr><td>A</td><td></td><td>4</td><td>2</td><td></td><td></td><td>8</td></tr><tr><td>B</td><td>4</td><td></td><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>C</td><td>2</td><td>3</td><td></td><td>3</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>D</td><td></td><td></td><td>3</td><td></td><td></td><td>2</td></tr><tr><td>E</td><td></td><td></td><td>2</td><td></td><td></td><td>5</td></tr><tr><td>F</td><td>8</td><td></td><td>4</td><td>2</td><td>5</td><td></td></tr></table>		A	B	C	D	E	F	A		4	2			8	B	4		3				C	2	3		3	2	4	D			3			2	E			2			5	F	8		4	2	5		29	<table><tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td><td>F</td></tr><tr><td>A</td><td></td><td>7</td><td>4</td><td>8</td><td></td><td></td></tr><tr><td>B</td><td>7</td><td></td><td></td><td>3</td><td></td><td></td></tr><tr><td>C</td><td>4</td><td></td><td></td><td>3</td><td></td><td></td></tr><tr><td>D</td><td>8</td><td>3</td><td>3</td><td></td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>E</td><td></td><td></td><td></td><td>2</td><td></td><td>5</td></tr><tr><td>F</td><td></td><td></td><td></td><td>3</td><td>5</td><td></td></tr></table>		A	B	C	D	E	F	A		7	4	8			B	7			3			C	4			3			D	8	3	3		2	3	E				2		5	F				3	5	
		A	B	C	D	E	F																																																																																														
	A		4	2			8																																																																																														
	B	4		3																																																																																																	
	C	2	3		3	2	4																																																																																														
	D			3			2																																																																																														
	E			2			5																																																																																														
	F	8		4	2	5																																																																																															
	A	B	C	D	E	F																																																																																															
A		7	4	8																																																																																																	
B	7			3																																																																																																	
C	4			3																																																																																																	
D	8	3	3		2	3																																																																																															
E				2		5																																																																																															
F				3	5																																																																																																
15	<table><tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td><td>F</td></tr><tr><td>A</td><td></td><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td></td><td>5</td></tr><tr><td>B</td><td>1</td><td></td><td></td><td>4</td><td></td><td></td></tr><tr><td>C</td><td>2</td><td></td><td></td><td>3</td><td></td><td></td></tr><tr><td>D</td><td>4</td><td>4</td><td>3</td><td></td><td>4</td><td>9</td></tr><tr><td>E</td><td></td><td></td><td></td><td>4</td><td></td><td>3</td></tr><tr><td>F</td><td>5</td><td></td><td></td><td>9</td><td>3</td><td></td></tr></table>		A	B	C	D	E	F	A		1	2	4		5	B	1			4			C	2			3			D	4	4	3		4	9	E				4		3	F	5			9	3		30	<table><tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td><td>F</td></tr><tr><td>A</td><td></td><td>5</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>B</td><td>5</td><td></td><td>9</td><td>3</td><td>8</td><td></td></tr><tr><td>C</td><td></td><td>9</td><td></td><td></td><td>4</td><td></td></tr><tr><td>D</td><td></td><td>3</td><td></td><td></td><td>2</td><td></td></tr><tr><td>E</td><td></td><td>8</td><td>4</td><td>2</td><td></td><td>7</td></tr><tr><td>F</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>7</td><td></td></tr></table>		A	B	C	D	E	F	A		5					B	5		9	3	8		C		9			4		D		3			2		E		8	4	2		7	F					7	
		A	B	C	D	E	F																																																																																														
	A		1	2	4		5																																																																																														
	B	1			4																																																																																																
	C	2			3																																																																																																
	D	4	4	3		4	9																																																																																														
	E				4		3																																																																																														
	F	5			9	3																																																																																															
	A	B	C	D	E	F																																																																																															
A		5																																																																																																			
B	5		9	3	8																																																																																																
C		9			4																																																																																																
D		3			2																																																																																																
E		8	4	2		7																																																																																															
F					7																																																																																																

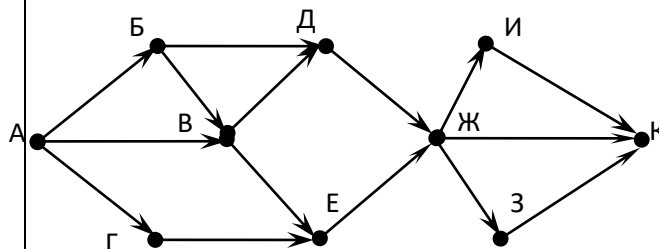
Задание4. Решите задачи с помощью графов.

Четный вариант	Нечетный вариант
Из города А в город В ведут три дороги, а из города В в город С - четыре дороги. Сколькими способами можно проехать из А в С через В?	Андрей, Борис, Виктор и Григорий после возвращения из спортивного лагеря подарили на память друг другу свои фотографии. Причем каждый мальчик подарил каждому из своих друзей по одной фотографии. Сколько всего фотографий было подарено?
Расположите на плоскости 6 точек и соедините их непересекающимися линиями так, чтобы из каждой точки выходили четыре линии.	Соединить 9 точек 4 линиями не отрывая руки (направления соединения точек показать с помощью дуг) 

На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И, К, Л. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город Л?



На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город К?



Контрольные вопросы:

1. Что такое граф?
2. Чем ребро отличается от дуги?
3. Какая дуга называется петлей?
4. Изобразите граф с двумя изолированными вершинами.
5. Приведите 5 видов графов, известных вам.
6. При построение матрицы инцидентности графа, что указывается в столбцах и строках таблицы?
7. Матрица смежности какого графа является симметричной?
8. Может ли степень вершины графа быть отрицательной? равной 0? (ответы поясните)
9. Опишите кратко, в чем заключается решение задачи о коммивояжерах?

Литература:

1. Григорьев С.Г., Иволгина С.В., Математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования; под ред. В.А. Гусева. – 15-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2020.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6

Действия над матрицами

Цель занятия: закрепить навыки выполнения операций над матрицами

Оборудование: методические указания по выполнению работы.

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

1. Изучить краткие теоретические сведения;
2. Изучить схему решения задач
3. Оформить отчет по работе.

Содержание отчета:

1. Название практической работы, ее цель, оборудование, время выполнения.
2. Выполненные задания в соответствии с данными своего варианта (не забывайте записывать само задание).
3. Ответы на контрольные вопросы
4. Вывод по практической работе.

Теоретическая часть:

Матрицей размерности $m \times n$ называется прямоугольная таблица из чисел с некоторым количеством m строк и с некоторым количеством n столбцов.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для обозначения матрицы используют заглавные латинские буквы, для обозначения элементов матрицы – строчные латинские буквы с указанием номера строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент. Запись «матрица B имеет размер $m \times n$ » означает, что речь идет о матрице, состоящей из m строк и n столбцов.

Например, матрица $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ имеет размер 2×3 .

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется **квадратной**. Квадратную матрицу размера $n \times n$ называют **матрицей n -го порядка**. Элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ квадратной матрицы A (размера $n \times n$) образуют **главную диагональ**.

Если все элементы матрицы вне главной диагонали равны 0, то матрица называется **диагональной**. Если все элементы матрицы равны 0, то она называется **нулевой**.

Матрица называется **единичной**, если все элементы на ее главной диагонали равны 1. (Все остальные элементы при этом равны 0.) Единичная матрица чаще всего обозначается буквой E или E_n , где n - порядок матрицы. Например, - единичная матрица 4-го порядка:

$$E_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрицы A, B называются **равными** ($A=B$), если они имеют одинаковый размер, и их элементы, стоящие на одинаковых позициях, совпадают.

Действия над матрицами

1. Сложение

Операция сложения матриц вводится только для матриц одинаковых размеров.

Чтобы найти **сумму матриц** A, B одной размерности, необходимо сложить элементы с одинаковыми индексами (стоящие на одинаковых местах):

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

2. Умножение на число

Чтобы **умножить матрицу** A на **отличное от нуля действительное число** k , необходимо каждый элемент матрицы умножить на это число:

$$kA = k \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

3. Линейная комбинация

Линейной комбинацией матриц A и B одинакового размера называется выражение вида $\alpha A + \beta B$, где α и β произвольные числа.

4. Произведение

Произведением двух матриц A и B называется матрица C , элемент которой, находящийся на пересечении i -й строки и j -го столбца, равен сумме произведений элементов i -й строки матрицы A на соответствующие (по порядку) элементы j -го столбца матрицы B .

Таким образом, формула элемента матрицы C : $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$

Произведение матрицы A на матрицу B обозначается AB . Произведение матриц существует тогда и только тогда, когда число столбцов в первой матрице равно числу строк во второй. Если матрицы A и B квадратные одного размера, то произведение AB и BA всегда существует.

Примеры решения заданий:

Пример 1. Найти линейную комбинацию матриц $2A-B$, если $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

РЕШЕНИЕ: Сначала умножаем матрицу A на число 2, затем матрицу B на число -1, и, наконец, находим сумму полученных матриц:

$$2A - B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Пример 2. Найти произведение матриц

Решение. Размер матрицы A 3×2 , матрицы B 2×2 . Поэтому произведение AB найти можно, произведение BA – нет. Действуя по сформулированному выше правилу, получаем:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & -1 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 \\ 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 & 0 \cdot (-2) + 4 \cdot 4 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 3 & 2 + 4 \\ 0 + 12 & 0 + 16 \\ 2 + 3 & -4 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 12 & 16 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Задание 1: Найдите линейную комбинацию матриц:

№ варианта	Задание для практической работы	
	Дано:	Найти
1	$A = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 9 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$	$A - 4B + 2C$
2	$A = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	$2A + 3B - C$
3	$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 4 & -8 & -2 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$3A - B + C$
4	$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \\ 8 & -9 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 7 & -2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$	$A + 3B - C$
5	$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -8 \\ -2 & 1 & -6 \end{pmatrix}$	$C + 4A - B$
6	$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$	$A + B - 2A$
7	$A = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 8 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$	$4B - 2A + C$
8	$A = \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -8 & 7 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -8 & 9 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$	$2A + B - 3A$
9	$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 9 & -8 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 4 & -14 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} -8 & 7 \\ 4 & 10 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$	$A + B + 2C$
10	$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 6 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} -8 & -4 & 1 \\ 2 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -3 \\ 4 & 7 & -9 \end{pmatrix}$	$C - B + 3A$

11	$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -9 \\ 4 & 10 & 19 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} -9 & 4 & 1 \\ 27 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 10 \\ -9 & 7 & 4 \end{pmatrix}$	$3A+B-2C$
12	$A = \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ 10 & 11 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$	$A-4B+C$
13	$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ -7 & 8 & 1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -9 & 6 & 10 \\ 11 & 19 & -7 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$C+2A+3B$
14	$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -5 \\ 8 & -7 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 1 & 20 \\ -9 & 55 \end{pmatrix}$	$C-A+2B$
15	$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -9 \\ -8 & 11 & -30 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} -4 & 5 & -8 \\ 9 & 3 & 17 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 10 \\ 4 & -6 & 6 \end{pmatrix}$	$B-A+2C$
16	$A = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 1 & 22 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 10 & -8 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$C+2A+B$
17	$A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 5 \\ 10 & 21 & 3 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -3 \\ 4 & -8 & 0 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 \\ -5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$	$3B-A+2C$
18	$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 6 & -9 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ -6 & -5 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -7 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$	$3A-B+2C$
19	$A = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -8 & 6 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 2 & 4 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 6 & -5 \\ 1 & 15 \end{pmatrix}$	$B+2A+C$
20	$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -9 & 4 \\ 0 & 5 & 8 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} -9 & 6 & 2 \\ 13 & -7 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$	$C+4B+2A$
21	$A = \begin{pmatrix} -2 & 13 & 6 \\ -9 & 4 & -4 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -6 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$	$4A+B+2C$
22	$A = \begin{pmatrix} 6 & -88 \\ 1 & 6 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -6 & -4 \\ 19 & 9 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 31 & 20 \\ 4 & -8 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$	$A+2B+2C$
23	$A = \begin{pmatrix} 11 & 65 \\ -5 & 5 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -7 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 5 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}$	$C-2A-B$
24	$A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 5 \\ -7 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 5 \\ 28 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	$A+2C-B$
25	$A = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 6 & -5 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -8 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ 1 & 7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$A+2C-3B$

26	$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 11 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$	$C+2B-3A$
27	$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 10 & -4 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & -14 & 3 \\ 12 & -5 & 6 \end{pmatrix}$	$2A-B-C$
28	$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -3 & 9 & 14 \\ 10 & -5 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -13 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 5 & 10 & -1 \\ 0 & -3 & 7 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$B+3A-C$
29	$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 7 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 16 \\ 10 & 8 \\ -10 & 3 \end{pmatrix}$	$2B+3A-C$
30	$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 8 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 8 \\ 7 & 3 & -4 \\ 8 & -9 & 3 \end{pmatrix}$	$A-C+2B$

Задание 2: Найдите произведение матриц AB и BA (если они существуют):

№ варианта	Задание для практической работы	№ варианта	Задание для практической работы
1	$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \\ -7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	16	$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -7 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
2	$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	17	$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 8 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
3	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & -1 \\ 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	18	$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$
4	$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$	19	$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -4 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

5	$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 \\ -1 & -3 & 4 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$	20	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \\ -4 & 10 & 8 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & -8 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$
6	$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -4 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$	21	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 4 & -2 & -7 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 8 \\ 6 & 1 & 3 \\ -5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$
7	$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$	22	$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 5 & 9 & 7 \\ -5 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ -1 & 7 & 9 \end{pmatrix}$
8	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -5 & -1 & 0 \\ 7 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -5 \\ 5 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}$	23	$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 8 \\ 7 & 3 & -4 \\ 8 & -9 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
9	$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ -8 & 9 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & -0 & 4 \\ 8 & 7 & 1 \\ -1 & 8 & 6 \end{pmatrix}$	24	$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -5 \\ 9 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -3 \\ 4 & 4 & -3 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
10	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 4 \\ -4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ -7 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	25	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
11	$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 5 & 8 & -7 \\ -4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$	26	$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ -7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
12	$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -5 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	27	$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & -5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

	$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ -9 & -9 & 9 \end{pmatrix}$		$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
13	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 6 & 8 & -1 \\ -5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$	28	$A = \begin{pmatrix} 3 & - & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 5 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
14	$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	29	$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & -4 & 7 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$
15	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -6 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	30	$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 4 & 5 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Задание 3: Выполните действия, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \\ -7 & 4 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}:$$

варианта	Задание для практической работы	№ варианта	Задание для практической работы
1	$AC+2B$	16	$AB+5B$
2	$BC-A$	17	$BA - 2C$
3	$3C-AB$	18	$BC+5A$
4	$BA+5A$	19	$CA + 2B$
5	$6B+AB$	20	$5C-AB$
6	$CA-2B$	21	$3B-BA$
7	$CA + 3B$	22	$2A+AB$
8	$BA-2A$	23	$AC+3B$
9	$6AB-2B$	24	$2C-AB$
10	$CA+5B$	25	$3A-BC$
11	$BA - 4A$	26	$CB+2A$
12	$-AB+2B$	27	$-A-BC$
13	$CB + 3A$	28	$AC+3C$
14	$AB-4A$	29	$BC+5C$
15	$2AC + B$	30	$AB-3C$

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение матрицы.
2. Запишите пример матрицы размера 4×2 .
3. Могут ли все элементы матрицы быть равными нулю. Если да, то как она называется?
4. При каких условиях матрицы считаются равными?
5. Какая матрица называется единичной? Как она обозначается?
6. Когда возможна операция сложения матриц и как вычисляется результат?
7. Как найти произведение матрицы на число?
8. Когда возможна операция умножения матриц? Какова размерность результата умножения?
9. Для каких матриц всегда можно найти их произведение?
10. Что называется линейной комбинацией матриц?

Литература:

1. Григорьев В.П., Дубинский Ю.А. Элементы высшей математики: Учеб. Для студ. Учреждений сред.проф. образования.- М.: Издательский центр «Академия», 2004г.
2. Лунгу К.Н. , Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. – 3-у изд., испр. и доп. – М.: Айрис-пресс, 2003г.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №7

Вычисление определителей второго и третьего порядка

Цель занятия: сформировать навыки вычисления определителей второго и третьего порядка.

Оборудование: методические указания по выполнению работы.

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

4. Изучить краткие теоретические сведения;
5. Изучить схему решения задач
6. Оформить отчет по работе.

Содержание отчета:

5. Название практической работы, ее цель, оборудование, время выполнения.
6. Выполненные задания в соответствии с данными своего варианта (не забывайте записывать само задание).
7. Ответы на контрольные вопросы
8. Вывод по практической работе.

Теоретическая часть:

Матрицей называется прямоугольная таблица из чисел с некоторым количеством m строк и с некоторым количеством n столбцов. Если количество строк матрицы равно количеству столбцов, то такая матрица называется *квадратной*.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ где } m = n. \text{ Число } m=n \text{ называется порядком квадратной}$$

матрицы. Элементы, расположенные на местах $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют *главную диагональ* матрицы. Элементы, расположенные на местах $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ образуют *побочную диагональ* матрицы.

Любой квадратной матрице n -го порядка, можно поставить в соответствие выражение, которое называется определителем (детерминантом) матрицы A и обозначается $|A|$ или $\det A$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Для определителей второго и третьего порядка существуют рациональные способы их вычислений.

Определителем второго порядка называется число, полученное с помощью элементов квадратной матрицы 2-го порядка следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}, \text{ т.е.}$$

чтобы вычислить определитель матрицы второго порядка, надо от произведения элементов главной диагонали отнять произведение элементов побочной диагонали.

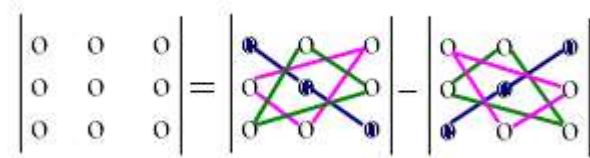
Пример 1. Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$.

РЕШЕНИЕ: $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 - 5 \cdot (-3) = 8 + 15 = 23$.

Определителем третьего порядка называется число, определяемое с помощью элементов квадратной матрицы 3-го порядка следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31})$$

Для того, чтобы легче запомнить эту формулу, можно использовать так называемое *правило треугольников*. Схематически это правило можно изобразить следующим образом:



Пример 2. Вычислить определитель с помощью правила треугольника $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}$.

РЕШЕНИЕ: $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-2) + 4 \cdot (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot 3 \cdot 1 - ((-1) \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot (-2)) = -6 + 8 + 9 - (-1 - 18 - 24) = 11 - (-43) = 11 + 43 = 54$.

Кроме правила треугольников вычисление определителей третьего порядка можно свести к вычислению трех определителей второго порядка, разложив исходный определитель по любой строке или столбцу.

Пример 3. Вычислить определитель с помощью правила треугольника разложением по элементам 1 строки и разложением по элементам 1 столбца: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$.

РЕШЕНИЕ:

a) Вычислим определитель, используя разложение по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -5 - 2 \cdot (-4) = 3$$

b) Вычислим определитель, используя разложение по первому столбцу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -5 + 8 = 3$$

Свойства определителей:

1° Определитель не изменится, если строки определителя заменить соответствующими столбцами.

Пример: Вычислим определитель: $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 12 - 2 = 10$.

Заменяем первую строку определителя первым столбцом: $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 12 - 2 = 10$. Как видим, результаты в обоих случаях совпали.

2° Общий множитель элементов какой-либо строки (столбца) определителя может быть вынесен за знак определителя.

Пример: Вычислим определитель, пользуясь определением

$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6 = 12 - 6 = 6$. Теперь посчитаем тот же определитель, применив свойство, т.е. выносим 3 за знак определителя из первой строки: $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (1 \cdot 4 - 2 \cdot 1) = 3 \cdot 2 = 6$.

3° Если элементы одной строки (столбца) определителя соответственно равны элементам другой строки (столбца) определителя, то определитель равен нулю.

Пример: $\begin{vmatrix} 35 & 4 \\ 35 & 4 \end{vmatrix} = 35 \cdot 4 - 4 \cdot 35 = 140 - 140 = 0$.

4° Определитель не изменится, если к элементам одной строки (столбца) прибавить соответственно элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число (теорема о линейной комбинации параллельных рядов определителя).

Пример: $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 12 - 2 = 10$. Прибавим теперь к первой строке элементы второй строки, умноженные на 3 и снова найдем определитель:

$\begin{vmatrix} 3 + 2 \cdot 3 & 1 + 4 \cdot 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 13 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 9 \cdot 4 - 13 \cdot 2 = 36 - 26 = 10$. Как видим, результаты в обоих случаях совпали.

5° Определитель изменит знак, если поменять местами какие-либо 2 строки или столбца.

Пример: Вычислим определитель: $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 12 - 2 = 10$. Поменяем строки местами и вновь посчитаем определитель: $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 4 = 2 - 12 = -10$. Ответ получился с противоположным знаком.

6° Если элементы строки или столбца равны нулю, то и определитель равен нулю.

Пример: $\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot 0 - 4 \cdot 0 = 0$.

Примеры решения заданий:

Пример 4. Решить уравнение: $\begin{vmatrix} 2x + 1 & 3 \\ x + 5 & 2 \end{vmatrix} = 0$

РЕШЕНИЕ: Воспользуемся определением определителя второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 2x+1 & 3 \\ x+5 & 2 \end{vmatrix} = (2x+1) \cdot 2 - 3 \cdot (x+5).$$

По условию данный определитель равен 0, тогда получаем: $(2x+1) \cdot 2 - 3 \cdot (x+5) = 0$.

Раскрыв скобки, получаем: $4x + 2 - 3x - 15 = 0$. Откуда $x=13$.

Ответ: $x=13$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Задание 1: Вычислить определитель второго порядка:

№ варианта	Задание для практической работы	№ варианта	Задание для практической работы
1	1); $\begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ 2); $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$	16	1); $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ 2); $\begin{vmatrix} 10 & 20 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$
2	1); $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ 2); $\begin{vmatrix} 1/2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$	17	1); $\begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ 2); $\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ -1 & -5 \end{vmatrix}$
3	1); $\begin{vmatrix} 1/3 & 1 \\ -1 & 9 \end{vmatrix}$ 2); $\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$	18	1); $\begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$ 2); $\begin{vmatrix} 0 & 0,5 \\ 10 & 5 \end{vmatrix}$
4	1); $\begin{vmatrix} 12 & -4 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$ 2); $\begin{vmatrix} 13 & 41 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$	19	1); $\begin{vmatrix} -2 & 14 \\ -1 & 12 \end{vmatrix}$ 2); $\begin{vmatrix} 7 & 10 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$
5	1); $\begin{vmatrix} 3/7 & 27 \\ 5/9 & 14 \end{vmatrix}$ 2); $\begin{vmatrix} -3 & 11 \\ 4 & -8 \end{vmatrix}$	20	1); $\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$ 2); $\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 13 & 4 \end{vmatrix}$
6	1); $\begin{vmatrix} 15 & -3 \\ 4 & -7 \end{vmatrix}$ 2); $\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$	21	1); $\begin{vmatrix} 5 & 32 \\ 10 & -1 \end{vmatrix}$ 2); $\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$
7	1); $\begin{vmatrix} -22 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}$ 2); $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$	22	1); $\begin{vmatrix} 81 & 1 \\ 36 & 1 \end{vmatrix}$ 2); $\begin{vmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -14 \end{vmatrix}$
8	1); $\begin{vmatrix} 2 & -14 \\ 1 & -18 \end{vmatrix}$ 2); $\begin{vmatrix} 2 & -9 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$	23	1); $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 11 \end{vmatrix}$ 2); $\begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1/4 \end{vmatrix}$
9	1); $\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ -4 & 0,2 \end{vmatrix}$ 2); $\begin{vmatrix} 0,5 & 4 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$	24	1); $\begin{vmatrix} 1/2 & -2 \\ 1 & 18 \end{vmatrix}$ 2); $\begin{vmatrix} -6 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$
10	1); $\begin{vmatrix} -9 & 7 \\ 6 & -6 \end{vmatrix}$ 2); $\begin{vmatrix} 12 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}$	25	1); $\begin{vmatrix} 12 & -4 \\ 1/4 & 0,5 \end{vmatrix}$ 2); $\begin{vmatrix} 12 & 17 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$
11	1); $\begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ 2); $\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$	26	1); $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ 2); $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$
12	1); $\begin{vmatrix} 5 & 37 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ 2); $\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$	27	1); $\begin{vmatrix} 3 & 16 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$ 2); $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$
13	1); $\begin{vmatrix} 13 & 2 \\ 26 & 3 \end{vmatrix}$ 2); $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 16 & 8 \end{vmatrix}$	28	1); $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ 2); $\begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

14	1); $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ 2); $\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$	29	1); $\begin{vmatrix} -1 & 11 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$ 2); $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 15 & 6 \end{vmatrix}$
15	1); $\begin{vmatrix} 13 & 17 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$); $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$.	30	1); $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$ 2); $\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 11 & -22 \end{vmatrix}$

Задание 2: Вычислить определитель третьего порядка с помощью правила треугольника, разложением по элементам 1 строки и разложением по элементам 1 столбца. В ответе запишите вывод о равенстве результатов.

№ варианта	Задание для практической работы	№ варианта	Задание для практической работы	№ варианта	Задание для практической работы
1	$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}$	11	$\begin{vmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & -1 \end{vmatrix}$	21	$\begin{vmatrix} 2 & 8 & -3 \\ 0 & -8 & 1 \\ 5 & -6 & -1 \end{vmatrix}$
2	$\begin{vmatrix} 3 & 21 & 17 \\ 0 & 5 & 52 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$	12	$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$	22	$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$
3	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$	13	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 9 & -1 \end{vmatrix}$	23	$\begin{vmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 6 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$
4	$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 9 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$	14	$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 9 \end{vmatrix}$	24	$\begin{vmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & -1 \end{vmatrix}$
5	$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 7 & -1 & 12 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$	15	$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & -6 & 1 \end{vmatrix}$	25	$\begin{vmatrix} 2 & 8 & -3 \\ 0 & -8 & 1 \\ 5 & -6 & -1 \end{vmatrix}$
6	$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 7 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$	16	$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$	26	$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$
7	$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 7 & 8 & 35 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	17	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 9 & -1 \end{vmatrix}$	27	$\begin{vmatrix} 5 & 1 & -16 \\ -4 & -2 & 13 \\ 8 & 4 & 0 \end{vmatrix}$
8	$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 8 & -3 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}$	18	$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & -6 & 1 \end{vmatrix}$	28	$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 5 & 3 \\ 4 & -2 & 7 \end{vmatrix}$
9	$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 6 \\ -7 & 5 & -3 \end{vmatrix}$	19	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$	29	$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -6 & 3 & 22 \\ 4 & -11 & -3 \end{vmatrix}$

10	$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix};$	20	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 8 & -2 \end{vmatrix}$	30	$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 7 \\ 4 & -5 & -10 \end{vmatrix}$
-----------	---	-----------	--	-----------	--

Задание 3: Решить уравнение:

№ варианта	Задание для практической работы	№ варианта	Задание для практической работы
1	$\begin{vmatrix} x-1 & -3 \\ x+5 & 1 \end{vmatrix} = 4$	16	$\begin{vmatrix} x+8 & -5 \\ x & 3 \end{vmatrix} = 4 + 2x$
2	$\begin{vmatrix} 3x+2 & 2 \\ 5-x & 2 \end{vmatrix} = 1+x$	17	$\begin{vmatrix} 2x-1 & 3 \\ 2x+5 & -2 \end{vmatrix} = 10$
3	$\begin{vmatrix} 3x+8 & 5 \\ -x & 1 \end{vmatrix} = -2x$	18	$\begin{vmatrix} 3x-1 & 3 \\ x+1 & 4 \end{vmatrix} = -7$
4	$\begin{vmatrix} 4x+1 & x-5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 4$	19	$\begin{vmatrix} 6x-9 & 4 \\ x+10 & 2 \end{vmatrix} = 2$
5	$\begin{vmatrix} 3x+2 & -3 \\ -2x & 4 \end{vmatrix} = -1$	20	$\begin{vmatrix} 4x+7 & 1 \\ x-2 & 1 \end{vmatrix} = -1$
6	$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ x+5 & 2x-9 \end{vmatrix} = 0$	21	$\begin{vmatrix} 3x+2 & -2 \\ x-5 & 1 \end{vmatrix} = 4x-5$
7	$\begin{vmatrix} x+10 & 3x-4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 16$	22	$\begin{vmatrix} x-10 & 3x+4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 8$
8	$\begin{vmatrix} 5x+7 & 2 \\ x-15 & -1 \end{vmatrix} = x+1$	23	$\begin{vmatrix} 3x+2 & 2 \\ x+5 & -1 \end{vmatrix} = x-5$
9	$\begin{vmatrix} 1-3x & 3 \\ x-3 & 5 \end{vmatrix} = 2x+7$	24	$\begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 8x-5 & 4x-2 \end{vmatrix} = 0$
10	$\begin{vmatrix} 12x & 3-4x \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = x+3$	25	$\begin{vmatrix} 4x-11 & x+5 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 4-x$
11	$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 8x-2 & 2+3x \end{vmatrix} = 1$	26	$\begin{vmatrix} 5+2x & 4 \\ x+1 & 3 \end{vmatrix} = x+1$
12	$\begin{vmatrix} -11 & 6 \\ 8x+5 & 4x+2 \end{vmatrix} = -10$	27	$\begin{vmatrix} 14 & 5 \\ 3x-2 & x+7 \end{vmatrix} = 15$
13	$\begin{vmatrix} 2x+1 & 3+4x \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = 0$	28	$\begin{vmatrix} 8x+2 & x-4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 3x$
14	$\begin{vmatrix} 3x+1 & -1 \\ 2x+5 & 1 \end{vmatrix} = 1$	29	$\begin{vmatrix} 5x+6 & 4 \\ 2x+4 & 3 \end{vmatrix} = -1$
15	$\begin{vmatrix} x-42 & 5 \\ 5+3x & 2 \end{vmatrix} = 11+x$	30	$\begin{vmatrix} x-11 & -1 \\ 2-x & 3 \end{vmatrix} = x+2$

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение квадратной матрицы.
2. Как определить порядок квадратной матрицы?
3. Сколько диагоналей выделяют в квадратной матрице? Перечислите их.
4. Что такое детерминант?
5. Для каких матриц действует понятие «определитель»?
6. Сформулируйте правило нахождения определителей второго порядка.
7. Перечислите способы вычисления определителей третьего порядка.
8. Может ли в результате вычисления определителей получиться отрицательное число? 0?
9. Докажите первое свойство определителей на примере определителя третьего порядка.

Литература:

1. Григорьев В.П., Дубинский Ю.А. Элементы высшей математики: Учеб. Для студ. Учреждений сред.проф. образования.- М.: Издательский центр «Академия», 2004г.
2. Лунгу К.Н. , Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. – 3-у изд., испр. и доп. – М.: Айрис-пресс, 2003г.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 8

Решение систем уравнений

Цель: расширить представление о методах решения систем линейных уравнений и отработать алгоритм решения систем линейных уравнений методом Крамера и методом Гаусса

Оборудование: методические рекомендации

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

4. Изучить краткие теоретические сведения;
5. Изучить схему решения задач
6. Оформить отчет по работе.

Содержание отчета:

6. Название практической работы, ее цель.
7. Выполненное задание в соответствии с данными своего варианта (не забывайте списывать само задание).
8. Ответы на контрольные вопросы
9. Вывод по практической работе.

Теоретическая часть:

Пусть задана система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \text{-----} \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

Решением системы (1) называется совокупность чисел $(k_1, k_2, \dots, k_n)$, которая при подстановке в систему (1) вместо неизвестных обращает каждое уравнение системы в тождество. Система может иметь решение, тогда она называется *совместной*, причем, если решение единственное, *система определенная*, если решений множество – *система неопределенная*. Если система не имеет решений, она называется *несовместной*. Рассмотрим два способа решения системы: метод Крамера и метод Гаусса.

Метод Крамера

Метод Крамера применяют при решении систем, в которых число уравнений и количество неизвестных совпадают ($m = n$). При решении методом Крамера используем определители n -го порядка. Пусть задана система (1). Составим **главный определитель** системы из коэффициентов при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

ТЕОРЕМА. Если определитель системы $\Delta \neq 0$, то систему (1) можно решить по формуле Крамера, причем это решение единственное:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}; \quad \dots; \quad x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta},$$

где определитель Δ_{x_i} может быть получен из главного определителя путем замены i -го столбца на столбец из свободных членов.

Замечание:

1. Если один из вспомогательных определителей отличен от нуля, а главный определитель равен 0, то система уравнений (1) не имеет решения.
2. Если главный и все вспомогательные определители равны нулю, то система (1) имеет бесконечно много решений.
3. Если главный определитель отличен от нуля, то система уравнений (1) имеет единственное решение.

Алгоритм решения систем линейных уравнений по правилу Крамера.

1. Найдите главный определитель системы.
2. Найдите вспомогательные определители системы.
3. Найдите неизвестные, пользуясь формулами Крамера.
4. Запишите ответ.

Примеры решения заданий:

Пример 1. Решить систему правилом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$$

Составляем главный определитель, элементами которого являются коэффициенты при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix}$$

и три вспомогательных определителя:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix}; \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix}; \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix}.$$

Определитель Δ_{x_1} составлен из определителя Δ путем замены элементов первого столбца свободными членами системы уравнений. В определителях Δ_{x_2} и Δ_{x_3} соответственно второй и третий столбцы заменены свободными членами. Вычислим все четыре определителя.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 5 + 12 + 21 + 10 - 21 + 6 = 33, \text{ т.к. главный определитель не равен } 0,$$

то система имеет единственное решение. Для их нахождения вычислим остальные определители.

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 20 + 48 + 7 + 40 - 84 + 2 = 33;$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 24 + 24 - 2 - 24 + 12 = 33; \text{ Место для формулы.}$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -40 + 4 + 84 + 40 - 7 - 48 = 33.$$

Неизвестные x_1 , x_2 , x_3 находим по формулам из теоремы:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}; \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta};$$

$$x_1 = \frac{33}{33} = 1; \quad x_2 = \frac{33}{33} = 1; \quad x_3 = \frac{33}{33} = 1.$$

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 1$.

Для проверки результата подставим полученные значения неизвестных в каждое уравнение системы: $1 + 2 \cdot 1 + 1 = 4$; $3 \cdot 1 - 5 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 1$; $12 \cdot 1 + 7 \cdot 1 - 1 = 8$. Все уравнения обратились в тождества, значит, решение найдено верно.

Метод Гаусса

Эффективным методом решения и исследования систем линейных уравнений является метод последовательного исключения неизвестных, или метод Гаусса. Метод Гаусса – творческий метод. В этом его большое преимущество перед другими методами, т.к. указанное решение не является единственно возможным. И чем гибче мыслит человек, тем короче получается у него решение.

Метод Гаусса представляет собой специальный алгоритм последовательного исключения неизвестных из уравнений системы. В этом алгоритме обычно различают два этапа:

- **Первый этап** называется *прямой ход*,
- **Второй этап** – *обратный ход*.

Цель прямого хода метода Гаусса заключается в приведение матрицы системы к *треугольному* виду, когда в результате некоторых элементарных преобразований уравнений системы на главной диагонали матрицы системы будут располагаться ненулевые элементы, а все элементы ниже главной диагонали будут равны нулю. В результате наших преобразований должна получаться система, равносильная исходной системе линейных уравнений. Преобразования, которые позволяют свести исходную

систему к треугольной, сохраняя равносильность, называются *элементарными*.

Элементарными преобразованиями уравнений системы называют следующие преобразования:

- 1) перестановка местами двух любых уравнений;
- 2) умножение обеих частей какого-либо уравнения на любое число, не равное нулю;
- 3) прибавление к обеим частям одного из уравнений соответствующих частей любого другого уравнения;
- 4) перестановка (перенумерация) неизвестных системы.

Все перечисленные преобразования приводят к системам, которые равносильны (эквивалентны) исходной системе линейных уравнений.

Удобно в методе Гаусса работать не с самой системой линейных уравнений, а с основной системы – *расширенной матрицей*. Эту матрицу обозначают символом $\bar{A} = (A | B)$, и она содержит две части – матрицу A системы и столбец B свободных членов.

Элементарным преобразованиям системы соответствуют следующие элементарные преобразования расширенной матрицы:

- 1) умножение произвольной строки на любое число, отличное от нуля;
- 2) прибавление к произвольной строке матрицы любой другой строки матрицы;
- 3) перестановка местами любых двух строк;
- 4) перестановка местами любых двух столбцов матрицы A системы.

Пример 2. Решить систему уравнений методом Гаусса:
$$\begin{cases} 5x + 3y - z = 7 \\ 2x - 3y + 2z = 9 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$$

В результате элементарных преобразований добиваются того, чтобы в последнем уравнении системы осталось одно неизвестное (z), во втором – 2 неизвестных (y и z) а в первом – 3 неизвестных (x , y , z). За ведущее уравнение берется то, в котором коэффициент при x равен 1. Если такого уравнения нет, то его легко получить, разделив любое из уравнений системы на коэффициент при x .

Ведущим уравнением данной системы будет последнее. Перепишем систему так:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - 3y + 2z = 9 \\ 5x + 3y - z = 7 \end{cases} \quad (2)$$

Умножаем первое уравнение на (-2) и складываем со вторым, чтобы избавиться от x во втором уравнении. Результат сложения записываем на месте второго уравнения. Далее первое уравнение умножаем на (-5) и складываем с третьим, чтобы избавиться от x в третьем уравнении. Результат записываем на месте третьего уравнения. Первое уравнение при этом переписываем без изменений. Получим:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -7y - 16z = 2 \quad (3) \\ -7y - 4z = 7 \end{cases}$$

Системы уравнений (2) и (3) эквивалентны, т. е. они обе несовместны, или же обе совместны и имеют одни и те же решения.

Умножаем второе уравнение системы (5) на (-1) и складываем с третьим, чтобы избавиться от y в третьем уравнении. Первое уравнение при этом не трогаем. Результат записываем на месте третьего уравнения. Тогда

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -7y - 16z = 2. \\ 12z = 5 \end{cases}$$

Из последнего уравнения $z = \frac{5}{12}$. Подставляем это значение z во второе уравнение

$$\text{системы и находим } y: -7y - 16 \cdot \frac{5}{12} = 2 \quad y = -\frac{26}{11}.$$

В первое уравнение подставляем значения z и y , получаем

$$x + 2 \cdot \left(-\frac{26}{11}\right) + 3 \cdot \frac{5}{12} = 1 \quad x = \frac{187}{84}.$$

Ответ: $x = \frac{187}{84}$; $y = -\frac{26}{11}$; $z = \frac{5}{12}$ (рекомендуется сделать проверку).

Пример 3. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ 4x - y + 5z = -3 \end{cases}$$

Расширенная матрица системы будет иметь вид:

$$\bar{A} = (A | B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & -3 \end{array} \right)$$

Выполним **прямой ход** метода Гаусса. Процесс приведения матрицы системы к треугольному виду состоит из нескольких шагов:

Первый шаг.

Надо элемент a_{11} сделать равным единице. Так как мы имеем право переставлять строки, умножать на число какую-либо строку и складывать ее с любой другой строкой, то вычтем из второй строки первую и поставим результат на место первой строки, соответственно первая строка станет второй, а третья останется на своем месте. Получим:

$$\bar{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & -3 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & -3 \end{array} \right)$$

Важно то, что между двумя матрицами нет знака равенства, – его заменяет следующий

символ $\sim$ эквивалентности двух систем (матрицы разные, а соответствующие им системы уравнений имеют одинаковые решения).

Второй шаг.

Необходимо сделать, чтобы равнялись нулю все элементы 1-го столбца, матрицы A , расположенные ниже элемента a_{11} .

Для этого надо ко второй строке прибавить первую строку, умноженную на

-2. Аналогично, прибавить к третьей строке первую, умноженную на -4.

Получим: $\bar{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & -3 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 5 & -3 \end{array} \right)$

Третий шаг.

На третьем шаге получим нулевой элемент во втором столбце ниже элемента a_{22} . Для этого вторую строку последней матрицы умножим на -7, а третью строку на 5 и прибавим вторую строку к третьей:

$$\bar{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & -3 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 5 & -3 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & -22 \end{array} \right) (*)$$

Прямой ход выполнен, в результате мы получили *треугольную* матрицу (*). Теперь выполним **обратный ход**, для чего перейдем от матричной записи к соответствующей системе уравнений:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 5y + 2z = 1 \\ 11z = -22 \end{cases}$$

Из названия хода (обратный), понятно, что надо начинать с последнего уравнения, т.к. в нем содержится одна неизвестная z . Находим: $z = -2$, теперь подставим значение z во второе уравнение, получим: $y = 1$. Далее подставим значения $y = 1$ в первое уравнение: $x = 2y = 2$. Система имеет единственное решение $(2; 1; -2)$.

Ответ: $(2; 1; -2)$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Задание 1: Решите систему уравнений методом Крамера, методом Гаусса и выполните проверку:

№ варианта	Задание для практической работы	№ варианта	Задание для практической работы
1	$\begin{cases} 5x + 2y = -9 \\ 4x - 5y = 6 \end{cases}$	16	$\begin{cases} x + y = 4 \\ -x + 2y = 2 \end{cases}$
2	$\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 2 \end{cases}$	17	$\begin{cases} 2y - 3x = -4 \\ 3x + 9y = 15 \end{cases}$
3	$\begin{cases} x + 4y = 9 \\ 3x + 7y = 2 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 2y + 3x = 7 \end{cases}$

4	$\begin{cases} x + y = 12 \\ 2x - 3y = 14 \end{cases}$	19	$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 5x + 3y = 11 \end{cases}$	20	$\begin{cases} 2x + 3y = 16 \\ 3x - 2y = 11 \end{cases}$
6	$\begin{cases} 8x - 5y = 23 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$	21	$\begin{cases} 5x - 3y = 7 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 5x + 6y = 27 \end{cases}$	22	$\begin{cases} 4x - 3y = 7 \\ 5x + 2y = 26 \end{cases}$
8	$\begin{cases} x - 3y = 12 \\ 2x + 4y = 90 \end{cases}$	23	$\begin{cases} -x - 7y = 15 \\ 2x + y = -4 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 25x - 18y = 75 \\ 5x - 4y = 5 \end{cases}$	24	$\begin{cases} 2x + 5y = 15 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$
10	$\begin{cases} x - 3y = -1 \\ 2x - 5y = -1 \end{cases}$	25	$\begin{cases} 3x + 5y = 21 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$
11	$\begin{cases} 2x + 5y = 14 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$	26	$\begin{cases} 2x + 3y = -4 \\ 5x + 6y = -7 \end{cases}$
12	$\begin{cases} 7x + 4y = 74 \\ 3x + 2y = 32 \end{cases}$	27	$\begin{cases} 5x + 6y = -13 \\ 7x + 18y = -3 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 11x - 5y = 37 \\ 4y - x = 25 \end{cases}$	28	$\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 4x - 5y = 3 \end{cases}$
14	$\begin{cases} 5x + 8y = 31 \\ 3x + 8y = 25 \end{cases}$	29	$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 5x + 2y = 23 \end{cases}$
15	$\begin{cases} 3y - y = -17 \\ 5x + 3y = -5 \end{cases}$	30	$\begin{cases} 2x + 5y = 15 \\ 3x + 8y = -1 \end{cases}$

Задание 2: Решите систему уравнений методом Крамера, методом Гаусса и выполните проверку:

№ варианта	Задание для практической работы	№ варианта	Задание для практической работы
1	$\begin{cases} x + y - 4z = 1 \\ x + 2y - 3z = 5 \\ 3x - 2y + 4z = 4 \end{cases}$	16	$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x + y + 5z = -7 \\ 2x + 3y - 3z = 14 \end{cases}$
2	$\begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ 2x + 3y - z = 11 \\ 3x - 2y + 2z = -7 \end{cases}$	17	$\begin{cases} 10x - 9z = 19 \\ 8x - y = 10 \\ y - 12z = 10 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 2x - 3y + z = -1 \\ 5x + 2y - z = 0 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$	18	$\begin{cases} x - 2y - z = 3 \\ -3x + y + 2z = 0 \\ 2x + y + z = -1 \end{cases}$
4	$\begin{cases} x + 2y + z = -7 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x - y + 2z = 2 \end{cases}$	19	$\begin{cases} x + y - 2z = 6 \\ 2x + 3y - 7z = 6 \\ 5x + 2y + z = 16 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 7 \\ 7x + 4y - 8z = 3 \\ 5x - 3y - 4z = -12 \end{cases}$	20	$\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ x + 2y + z = 8 \\ x + y + 2z = 9 \end{cases}$
6	$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = -5 \\ 2x + y - z = 7 \\ -x + 3y + z = 2 \end{cases}$	21	$\begin{cases} 2x + y + 3z = 13 \\ x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 3x - 4y + 5z = 18 \\ 2x + 4y - 3z = 26 \\ x - 6y + 8z = 0 \end{cases}$	22	$\begin{cases} x + y - 2z = 6 \\ 2x + 3y - 7z = 16 \\ 5x + 2y + z = 16 \end{cases}$

8	$\begin{cases} x + 2y + 3z = 8 \\ 3x + y + z = 6 \\ 2x + y + 2z = 6 \end{cases}$	23	$\begin{cases} 3x - 3y + 2z = 2 \\ 4x - 5y + 2z = 1 \\ 5x - 6y + 4z = 3 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 7x + 2y - 4z = 19 \\ 5x + 3y - 3z = 15 \\ 5x - 3y + 3z = 15 \end{cases}$	24	$\begin{cases} -4x + 2y + z = -11 \\ 4x + y - z = 8 \\ -x - 2y - z = 6 \end{cases}$
10	$\begin{cases} 5x + 4y + 2z = 3 \\ 2x + 2y + z = 4 \\ x + 7y + 3z = 6 \end{cases}$	25	$\begin{cases} 4x - 7y + 8z = 0 \\ x - 2y - z = -3 \\ 6x + 2y + 3z = -9 \end{cases}$
11	$\begin{cases} -4x - 5y - 16z = 15 \\ -2x - y = 11 \\ -x - 3y + 4z = 17 \end{cases}$	26	$\begin{cases} x + 2y + 3z = 8 \\ 3x + y + z = 6 \\ 2x + y + 2z = 6 \end{cases}$
12	$\begin{cases} -5x + 2y + 4z = 13 \\ -x - y + z = 8 \\ -5x - 8z = 33 \end{cases}$	27	$\begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ 2x + 3y - z = 11 \\ 3x - 2y + 2z = -7 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 3x - 4y + 5z = 18 \\ 2x + 4y - 3z = 26 \\ x - 6y + 8z = 0 \end{cases}$	28	$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ 3x + 5y + 7z = 8 \end{cases}$
14	$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ x + 3y + 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 3 \end{cases}$	29	$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ 2x + y + 2z = 10 \\ 3x + 3y + z = 12 \end{cases}$
15	$\begin{cases} 3x + 2y + z = 2 \\ x - y + 2z = -1 \\ 3x + 2y + z = 3 \end{cases}$	30	$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$

Контрольные вопросы:

1. Запишите алгоритм решения систем линейных уравнений методом Крамера?
2. В каком случае система линейных уравнений при решении методом Крамера не будет иметь решений?
3. Для всех ли систем линейных уравнений применим метод Крамера?
4. В чем суть метода Гаусса?
5. Какие элементарные преобразования можно выполнять при решении систем линейных уравнений методом Гаусса?
6. Запишите расширенную матрицу для данной системы:
$$\begin{cases} 5x + 3y - z = 7 \\ 2x - 3y + 2z = 9 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$$
7. Как узнать, верно ли вы решили систему линейных уравнений?

Литература:

1. Григорьев В.П., Дубинский Ю.А. Элементы высшей математики: Учеб. Для студ. Учреждений сред.проф. образования.- М.: Издательский центр «Академия», 2004г.
2. Лунгу К.Н. , Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. – 3-у изд., испр. и доп. – М.: Айрис-пресс, 2003г.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №9

Построение рядов распределения случайной величины по заданному условию

Цель: закрепить навыки построения по заданному условию закона распределения дискретной случайной величины

Оборудование: методические рекомендации.

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

1. Изучить краткие теоретические сведения.
2. Изучить схему решения задач.
3. Оформить отчет по работе.

Содержание отчета:

1. Название практической работы, ее цель.
2. Выполненные задания в соответствии с данными своего варианта (не забывайте списывать само задание).
3. Ответы на контрольные вопросы
4. Вывод по практической работе.

Теоретическая часть:

Случайной величиной называется переменная величина, которая в зависимости от исходов испытания принимает то или иное значение (зависящее от случая).

Случайная величина, принимающая различные значения, которые можно записать в виде конечной или бесконечной последовательности, называется *дискретной случайной величиной*, т.е. возможные значения дискретной случайной величины образуют конечное множество.

Случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого промежутка, называется *непрерывной случайной величиной*.

Законом распределения дискретной случайной величины называется правило, по которому каждому возможному значению $x_1, x_2, x_3, \dots$ ставится в соответствие вероятность $p_1, p_2, p_3, \dots$ с которой случайная величина может принять это значение, причем сумма этих вероятностей равна 1.

Закон распределения можно задать таблично, аналитически (в виде формулы) и графически. Самый простой способ представления – табличный. При табличном задании закона распределения дискретной случайной величины первая строка таблицы содержит возможные значения, а вторая – их вероятности. Эта таблица называется рядом распределения. Для подсчета вероятностей появления событий при независимых испытаниях применяют формулу Бернулли: $P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$, где n - число испытаний, m - количество выпавших событий, $q=1-p$ - это вероятность не наступления данного события в каждом испытании. Формула Бернулли позволяет избавиться от большого числа вычислений при достаточно большом количестве испытаний.

Кроме табличного представления, ряд распределения можно представить графически, если по оси абсцисс отложить возможные значения дискретной случайной величины, а по оси ординат - соответствующие вероятности. Соединив полученные точки отрезками,

получим ломаную, называемую многоугольником распределения вероятностей 6
 Функцией распределения случайной величины X (обозначается $F(x)$) называется функция, определяемая соотношением $F(x) = P(X \leq x)$.

Пример 1: Абитуриент сдаёт два вступительных экзамена: по математике и физике. Составить закон распределения случайной величины x , числа полученных пятёрок, если вероятность получения пятёрки по математике равна 0,8, а по физике – 0,6.

РЕШЕНИЕ: Обозначим A и B – события, заключающиеся в том, что и математика, и физика сданы на 5. Очевидно, возможные значения X :

0 – не физика и не математика сданы на 5,

1 – или физика, или математика сданы на 5

2 – и физика и математика сданы на 5.

Тогда вероятности возникновения этих событий находятся так:

$P(A) = 0,8$ – экзамен по математике сдан на 5

$P(B) = 0,6$ – экзамен по физике сдан на 5

$P(\bar{A}) = 1 - 0,8 = 0,2$ – экзамен по математике не сдан на 5

$P(\bar{B}) = 1 - 0,6 = 0,4$ – экзамен по физике не сдан на 5.

Если студент сдал оба экзамена на 5, то $P(X=2) = P(A) \cdot P(B) = 0,8 \cdot 0,6 = 0,48$

Если студент на 5 только один из двух экзаменов, то $P(X=1) = P(A) \cdot P(\bar{B}) +$

$P(\bar{A}) \cdot P(B) = 0,8 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,6 = 0,44$

Если студент не сдал ни один экзамен на 5, то $P(X=0) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08$

Полученные результаты сведём в таблицу, которая и является ответом:

X	0	1	2	Сумма вероятностей
$P(A)$	0.08	0.44	0.48	$0,08+0,44+0,48=1$

Пример 2: Приживаемость саженцев яблонь составляет 80%. Наудачу выбирают 5 саженцев. Составить закон распределения числа прижившихся саженцев.

РЕШЕНИЕ: Вероятность приживаемости яблони равна 0,8, т.е $p=0,8$, $q=1-p=1-0,8=0,2$

X – случайная величина числа прижившихся яблонь из пяти саженцев. Возможные значения: $x_1 = 0$ – ни один саженец не прижился; $x_2 = 1$ – один саженец прижился; $x_3 = 2$ – два прижились; $x_4 = 3$ – три прижились; $x_5 = 4$ – четыре прижились, $x_6 = 5$ – пять яблонь прижились Найдём вероятности для каждого случая по формуле Бернулли:

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot 0,8^0 \cdot 0,2^{5-0} = 1 \cdot 1 \cdot 0,00032 = 0,00032$$

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot 0,8^1 \cdot 0,2^{5-1} = 5 \cdot 0,8 \cdot 0,0016 = 0,0064$$

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^{5-2} = 10 \cdot 0,64 \cdot 0,008 = 0,0512$$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2^{5-3} = 10 \cdot 0,512 \cdot 0,04 = 0,2048$$

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot 0,8^4 \cdot 0,2^{5-4} = 5 \cdot 0,4096 \cdot 0,2 = 0,4096$$

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot 0,8^5 \cdot 0,2^{5-5} = 1 \cdot 0,32768 \cdot 1 = 0,32768$$

Внесем найденные значения в таблицу и получим ответ.

Ответ:

X	0	1	2	3	4	5	Сумма вероятностей
P(X)	0,00032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4096	0,32768	1

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Задание 1: Абитуриент сдаёт два вступительных экзамена: по математике и физике.

Составить закон распределения случайной величины X, числа полученных пятёрок, если вероятность получения пятёрки по математике равна P(A), а по физике – P(B).

№ варианта	Задание для практической работы		№ варианта	Задание для практической работы	
	P(A)	P(B)		P(A)	P(B)
1	0,13	0,25	16	0,95	0,15
2	0,2	0,36	17	0,28	0,38
3	0,31	0,45	18	0,34	0,2
4	0,41	0,6	19	0,74	0,1
5	0,5	0,74	20	0,22	0,4
6	0,6	0,22	21	0,36	0,6
7	0,7	0,5	22	0,14	0,7
8	0,8	0,6	23	0,12	0,8
9	0,25	0,7	24	0,44	0,9
10	0,35	0,33	25	0,63	0,2
11	0,45	0,45	26	0,24	0,3
12	0,55	0,1	27	0,75	0,25
13	0,65	0,2	28	0,46	0,4
14	0,75	0,3	29	0,21	0,22
15	0,85	0,4	30	0,32	0,4

Задание 2: Стрелок делает по мишени 5 выстрелов. Вероятность попадания при каждом выстреле равна p. Построить ряд распределения числа попаданий.

№ варианта	Задание для практической работы	№ варианта	Задание для практической работы
1	p = 0,1	16	p = 0,85
2	p = 0,15	17	p = 0,9
3	p = 0,2	18	p = 0,95
4	p = 0,25	19	p = 0,52
5	p = 0,3	20	p = 0,64
6	p = 0,35	21	p = 0,72
7	p = 0,4	22	p = 0,84
8	p = 0,45	23	p = 0,43

9	$p = 0,5$	24	$p = 0,37$
10	$p = 0,55$	25	$p = 0,7$
11	$p = 0,6$	26	$p = 0,33$
12	$p = 0,65$	27	$p = 0,28$
13	$p = 0,24$	28	$p = 0,44$
14	$p = 0,75$	29	$p = 0,31$
15	$p = 0,8$	30	$p = 0,14$

Контрольные вопросы:

1. Какая величина называется случайной?
2. Перечислите виды случайных величин.
3. Какая случайная величина называется дискретной непрерывной?
4. Что представляет собой закон распределения дискретной случайной величины?
5. Перечислите способы задания закона распределения случайной величины.
6. Что такое ряд распределения дискретной случайной величины?
7. Запишите формулу, по которой можно найти вероятность появления события при независимых испытаниях.

Литература:

1. Григорьев С.Г., Иволгина С.В., Математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования; под ред. В.А. Гусева. – 15-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2020г.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №10

Расчет числовых характеристик случайной величины

Цель: приобрести практические навыки нахождения математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения.

Оборудование: методические рекомендации

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

1. Изучить краткие теоретические сведения.
2. Изучить схему решения задач.
3. Оформить отчет по работе.

Содержание отчета:

1. Название практической работы, ее цель.
2. Выполненные задания в соответствии с данными своего варианта (не забывайте списывать само задание).
3. Ответы на контрольные вопросы
4. Вывод по практической работе.

Теоретическая часть:

Математическое ожидание дискретной случайной величины

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности.

Пусть случайная величина X может принимать только значения $x_1, x_2, \dots, x_n$, вероятности которых соответственно равны $p_1, p_2, \dots, p_n$. Тогда математическое ожидание $M(X)$ случайной величины X определяется равенством:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n.$$

Пример 1. Найти математическое ожидание, если ряд распределения имеет вид:

X	2	4	6	8
P(X)	0.4	0.2	0.1	0.3

РЕШЕНИЕ: $M(X) = 2 \cdot 0.4 + 4 \cdot 0.2 + 6 \cdot 0.1 + 8 \cdot 0.3 = 4,6$

Ответ: 4,6

Математическое ожидание числа появлений события в одном испытании равно вероятности этого события.

Свойства математического ожидания:

1. Математическое ожидание постоянной случайной величины равно самой постоянной, т.е. $M(C) = C$.
2. Постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания, т.е. $M(aX) = aM(X)$.
3. Математическое ожидание суммы нескольких случайных величин равно сумме их математических ожиданий, т.е. $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$.
4. Для независимых случайных величин X и Y : $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$.

Дисперсия и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины

Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

Пример 2. Дискретная случайная величина задана рядом распределения. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

X	1	2	5
P(X)	0,3	0,5	0,2

РЕШЕНИЕ: Математическое ожидание $M(X) = 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,5 + 5 \cdot 0,2 = 2,3$. Тогда $D(X) = (1 - 2,3)^2 \cdot 0,3 + (2 - 2,3)^2 \cdot 0,5 + (5 - 2,3)^2 \cdot 0,2 = 1,69 \cdot 0,3 + 0,09 \cdot 0,5 + 7,29 \cdot 0,2 = 2,01$.

Ответ: $M(X)=2,3$, $D(X)=2,01$.

Свойства дисперсии:

1. Дисперсия постоянной случайной величины равно нулю, т.е. $D(C)=0$.
2. Постоянный множитель можно вынести за знак дисперсии в квадрате, т.е. $D(aX)=a^2D(X)$.
3. Дисперсия суммы нескольких случайных величин равно сумме их дисперсий, т.е. $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$.
4. Для независимых случайных величин X и Y: $M(X \cdot Y)=M(X) \cdot M(Y)$.
5. Для вычисления дисперсии часто удобно пользоваться другой формулой:
 $D(X) = (X^2) - [M(X)]^2$, т.е. дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины и квадратом ее математического ожидания.

Корень квадратный из дисперсии случайной величины называется *средним квадратическим отклонением случайной величины*: $\sigma = \sqrt{D(X)}$.

Пример 3. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, которая задана следующим рядом распределения:

X	2	3	10
P(X)	0,1	0,4	0,5

РЕШЕНИЕ: Математическое ожидание $M(X) = 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,4 + 10 \cdot 0,5 = 6,4$.

Тогда $M(X^2) = 2^2 \cdot 0,1 + 3^2 \cdot 0,4 + 10^2 \cdot 0,5 = 54$.

Дисперсия $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 54 - (6,4)^2 = 13,04$. Далее находим среднее квадратическое отклонение: $\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{13,04} = 3,61$.

Ответ: $\sigma = 3,61$, $D(X)=13,04$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Задание 1: Дискретная случайная величина задана рядом распределения. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины (**2 способами**) и среднее квадратическое отклонение:

Вариант	Задание для практической работы														
1	<table><tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>p_i</td><td>0,1</td><td>0,2</td><td>0,2</td><td>0,3</td><td>0,1</td><td>0,1</td></tr></table>	x_i	1	2	3	4	5	6	p_i	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1	0,1
	x_i	1	2	3	4	5	6								
p_i	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1	0,1									
2	<table><tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>p_i</td><td>0,2</td><td>0,15</td><td>0,15</td><td>0,05</td><td>0,05</td><td>0,4</td></tr></table>	x_i	1	2	3	4	5	6	p_i	0,2	0,15	0,15	0,05	0,05	0,4
	x_i	1	2	3	4	5	6								
p_i	0,2	0,15	0,15	0,05	0,05	0,4									
3	<table><tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>p_i</td><td>0,1</td><td>0,3</td><td>0,1</td><td>0,2</td><td>0,2</td><td>0,1</td></tr></table>	x_i	1	2	3	4	5	6	p_i	0,1	0,3	0,1	0,2	0,2	0,1
	x_i	1	2	3	4	5	6								
p_i	0,1	0,3	0,1	0,2	0,2	0,1									
4	<table><tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>p_i</td><td>0,25</td><td>0,3</td><td>0,15</td><td>0,15</td><td>0,1</td><td>0,05</td></tr></table>	x_i	1	2	3	4	5	6	p_i	0,25	0,3	0,15	0,15	0,1	0,05
	x_i	1	2	3	4	5	6								
p_i	0,25	0,3	0,15	0,15	0,1	0,05									
5	<table><tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>p_i</td><td>0,15</td><td>0,15</td><td>0,1</td><td>0,1</td><td>0,05</td><td>0,45</td></tr></table>	x_i	1	2	3	4	5	6	p_i	0,15	0,15	0,1	0,1	0,05	0,45
	x_i	1	2	3	4	5	6								
p_i	0,15	0,15	0,1	0,1	0,05	0,45									
6	<table><tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>p_i</td><td>0,1</td><td>0,1</td><td>0,3</td><td>0,1</td><td>0,3</td><td>0,1</td></tr></table>	x_i	1	2	3	4	5	6	p_i	0,1	0,1	0,3	0,1	0,3	0,1
	x_i	1	2	3	4	5	6								
p_i	0,1	0,1	0,3	0,1	0,3	0,1									
7	<table><tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>p_i</td><td>0,25</td><td>0,1</td><td>0,3</td><td>0,05</td><td>0,2</td><td>0,1</td></tr></table>	x_i	1	2	3	4	5	6	p_i	0,25	0,1	0,3	0,05	0,2	0,1
	x_i	1	2	3	4	5	6								
p_i	0,25	0,1	0,3	0,05	0,2	0,1									
8	<table><tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>p_i</td><td>0,25</td><td>0,25</td><td>0,1</td><td>0,1</td><td>0,1</td><td>0,2</td></tr></table>	x_i	1	2	3	4	5	6	p_i	0,25	0,25	0,1	0,1	0,1	0,2
	x_i	1	2	3	4	5	6								
p_i	0,25	0,25	0,1	0,1	0,1	0,2									
9	<table><tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>p_i</td><td>0,15</td><td>0,25</td><td>0,1</td><td>0,2</td><td>0,2</td><td>0,1</td></tr></table>	x_i	1	2	3	4	5	6	p_i	0,15	0,25	0,1	0,2	0,2	0,1
	x_i	1	2	3	4	5	6								
p_i	0,15	0,25	0,1	0,2	0,2	0,1									
10	<table><tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr></table>	x_i	1	2	3	4	5	6							
	x_i	1	2	3	4	5	6								

		p_i	0,15	0,35	0,15	0,15	0,1	0,1	
11									
	x_i	1	2	3	4	5	6		
	p_i	0,1	0,3	0,15	0,25	0,1	0,1		
12									
	x_i	1	2	3	4	5	6		
	p_i	0,05	0,05	0,4	0,15	0,15	0,2		
13									
	x_i	1	2	3	4	5	6		
	p_i	0,4	0,4	0,05	0,05	0,05	0,05		
14									
	x_i	1	2	3	4	5	6		
	p_i	0,15	0,25	0,35	0,05	0,1	0,1		
15									
	x_i	1	2	3	4	5	6		
	p_i	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,4		
16									
	x_i	1	2	3	4	5	6		
	p_i	0,2	0,2	0,15	0,25	0,1	0,1		
17									
	x_i	1	2	3	4	5	6		
	p_i	0,25	0,25	0,1	0,15	0,2	0,05		
18									
	x_i	1	2	3	4	5	6		
	p_i	0,6	0,1	0,05	0,15	0,05	0,05		
19									
	x_i	1	2	3	4	5	6		
	p_i	0,5	0,15	0,1	0,15	0,05	0,05		

20	<table><tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>p_i</td><td>0,15</td><td>0,15</td><td>0,15</td><td>0,15</td><td>0,2</td><td>0,2</td></tr></table>	x_i	1	2	3	4	5	6	p_i	0,15	0,15	0,15	0,15	0,2	0,2
x_i	1	2	3	4	5	6									
p_i	0,15	0,15	0,15	0,15	0,2	0,2									
21	<table><tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>p_i</td><td>0,15</td><td>0,4</td><td>0,05</td><td>0,2</td><td>0,1</td><td>0,1</td></tr></table>	x_i	1	2	3	4	5	6	p_i	0,15	0,4	0,05	0,2	0,1	0,1
x_i	1	2	3	4	5	6									
p_i	0,15	0,4	0,05	0,2	0,1	0,1									
22	<table><tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>p_i</td><td>0,25</td><td>0,05</td><td>0,15</td><td>0,05</td><td>0,3</td><td>0,2</td></tr></table>	x_i	1	2	3	4	5	6	p_i	0,25	0,05	0,15	0,05	0,3	0,2
x_i	1	2	3	4	5	6									
p_i	0,25	0,05	0,15	0,05	0,3	0,2									
23	<table><tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>p_i</td><td>0,35</td><td>0,3</td><td>0,15</td><td>0,05</td><td>0,05</td><td>0,1</td></tr></table>	x_i	1	2	3	4	5	6	p_i	0,35	0,3	0,15	0,05	0,05	0,1
x_i	1	2	3	4	5	6									
p_i	0,35	0,3	0,15	0,05	0,05	0,1									
24	<table><tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>p_i</td><td>0,25</td><td>0,1</td><td>0,15</td><td>0,05</td><td>0,3</td><td>0,15</td></tr></table>	x_i	1	2	3	4	5	6	p_i	0,25	0,1	0,15	0,05	0,3	0,15
x_i	1	2	3	4	5	6									
p_i	0,25	0,1	0,15	0,05	0,3	0,15									
25	<table><tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>p_i</td><td>0,05</td><td>0,15</td><td>0,1</td><td>0,1</td><td>0,45</td><td>0,15</td></tr></table>	x_i	1	2	3	4	5	6	p_i	0,05	0,15	0,1	0,1	0,45	0,15
x_i	1	2	3	4	5	6									
p_i	0,05	0,15	0,1	0,1	0,45	0,15									
26	<table><tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>p_i</td><td>0,3</td><td>0,1</td><td>0,1</td><td>0,1</td><td>0,1</td><td>0,3</td></tr></table>	x_i	1	2	3	4	5	6	p_i	0,3	0,1	0,1	0,1	0,1	0,3
x_i	1	2	3	4	5	6									
p_i	0,3	0,1	0,1	0,1	0,1	0,3									
27	<table><tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>p_i</td><td>0,05</td><td>0,2</td><td>0,3</td><td>0,25</td><td>0,1</td><td>0,1</td></tr></table>	x_i	1	2	3	4	5	6	p_i	0,05	0,2	0,3	0,25	0,1	0,1
x_i	1	2	3	4	5	6									
p_i	0,05	0,2	0,3	0,25	0,1	0,1									
28	<table><tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>p_i</td><td>0,25</td><td>0,2</td><td>0,1</td><td>0,1</td><td>0,1</td><td>0,25</td></tr></table>	x_i	1	2	3	4	5	6	p_i	0,25	0,2	0,1	0,1	0,1	0,25
x_i	1	2	3	4	5	6									
p_i	0,25	0,2	0,1	0,1	0,1	0,25									

29		x_i	1	2	3	4	5	6	
		p_i	0,25	0,15	0,1	0,1	0,2	0,2	
30									
		x_i	1	2	3	4	5	6	
		p_i	0,15	0,15	0,35	0,1	0,15	0,1	

Задание 2: Торговый агент имеет пять телефонных номеров потенциальных покупателей и звонит им до тех пор, пока не получит заказ на покупку товара. Вероятность того, что клиент сделает заказ равна p . Составьте ряд распределения числа телефонных разговоров, которые предстоит провести агенту. Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

№ варианта	Задание для практической работы	№ варианта	Задание для практической работы
1	$p = 0,15$	16	$p = 0,8$
2	$p = 0,5$	17	$p = 0,95$
3	$p = 0,25$	18	$p = 0,65$
4	$p = 0,2$	19	$p = 0,1$
5	$p = 0,34$	20	$p = 0,3$
6	$p = 0,35$	21	$p = 0,4$
7	$p = 0,24$	22	$p = 0,42$
8	$p = 0,44$	23	$p = 0,75$
9	$p = 0,52$	24	$p = 0,85$
10	$p = 0,12$	25	$p = 0,6$
11	$p = 0,64$	26	$p = 0,36$
12	$p = 0,32$	27	$p = 0,28$
13	$p = 0,22$	28	$p = 0,62$
14	$p = 0,7$	29	$p = 0,45$
15	$p = 0,82$	30	$p = 0,18$

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение математического ожидания дискретной случайной величины.
2. Чему равно математическое ожидание числа появлений события в одном испытании?
3. Запишите две формулы нахождения дисперсии случайной величины.
4. Может ли дисперсия быть равной 0? В каком случае?
5. Дайте определение среднего квадратического отклонения. Может ли среднее квадратическое отклонение быть отрицательной величиной? (ответ аргументируйте).

Литература:

1. Григорьев С.Г., Иволгина С.В., Математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования; под ред. В.А. Гусева. – 15-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2020г.