

Математическое ожидание произведения и дисперсия суммы независимых случайных величин

Свойство математического ожидаия

Математическое ожидание произведения
независимых случайных величин равно
произведению их математических ожиданий:

$$M(XY) = M(X)M(Y)$$

Доказательство свойства

Для упрощения выкладок, возьмем следующие распределения случайных величин X и Y :

X	x_1	x_2
P	p_1	p_2

Y	y_1	y_2
P	q_1	q_2

В общем случае доказательство проводится аналогично.

Согласно правилу умножения независимых случайных величин, составим закон распределения случайной величины XY :

XY	x_1y_1	x_2y_1	x_1y_2	x_2y_2
P	p_1q_1	p_2q_1	p_1q_2	p_2q_2

или

XY	x_1	x_2
y_1	p_1q_1	p_2q_1
y_2	p_1q_2	p_2q_2

Доказательство свойства

Если какие-то из значений случайной величины XY совпали, то дальнейшее доказательство проводится аналогично. Для простоты, будем считать, что все значения различны.

Тогда по определению математического ожидания дискретной случайной величины:

$$\begin{aligned} M(XY) &= x_1y_1p_1q_1 + x_2y_1p_2q_1 + x_1y_2p_1q_2 + x_2y_2p_2q_2 = \\ &= x_1p_1(y_1q_1 + y_2q_2) + x_2p_2(y_1q_1 + y_2q_2) = \\ &= (x_1p_1 + x_2p_2)(y_1q_1 + y_2q_2) = M(X)M(Y). \end{aligned}$$

Свойство дисперсии

Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин: $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.

Доказательство свойства

По формуле для вычисления дисперсии

$$\begin{aligned} D(X + Y) &= M((X + Y)^2) - (M(X + Y))^2 = \\ &= M(X^2 + 2XY + Y^2) - (M(X) + M(Y))^2 = \\ &= M(X^2) + M(2XY) + M(Y^2) - (M(X))^2 - 2M(X)M(Y) - (M(Y))^2 \stackrel{(1)}{=} \\ &= M(X^2) + 2M(X)M(Y) + M(Y^2) - (M(X))^2 - 2M(X)M(Y) - (M(Y))^2 \\ &= M(X^2) + M(Y^2) - (M(X))^2 - (M(Y))^2 = \\ &= [M(X^2) - (M(X))^2] + [M(Y^2) - (M(Y))^2] = D(X) + D(Y). \end{aligned}$$

(1) Так как $M(CX) = CM(X)$ и $M(XY) = M(X)M(Y)$ по свойствам МО.

Свойство дисперсии

Дисперсия разности двух независимых случайных величины равна сумме их дисперсий: $D(X - Y) = D(X) + D(Y)$.

Доказательство свойства

По свойству: $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.

$$D(X - Y) = D(X) + D(-Y) \stackrel{(1)}{=} D(X) + (-1)^2 D(Y) = D(X) + D(Y).$$

(1) По свойству: $(CX) = C^2 D(X)$.

Задание 1

Дискретные независимые случайные величины заданы законами распределения:

X	2	3
P	0,3	0,7

Y	1	1,5
P	0,2	0,8

Найдите математическое ожидание случайной величины $Z = XY$ двумя способами:

- а) составив закон распределения Z ;
- б) пользуясь свойством математического ожидания.

Задание 2

X , Y и Z попарно независимые случайные величины, математические ожидания которых равны 12, 4 и 5 соответственно. Найдите $M(W)$, если

а) $W = XY$;	г) $W = -2XY + 2$;	ж) $W = \frac{2YZ - X}{2}$;
б) $W = -3X - 2XY$;	д) $W = X - ZY$;	з) $W = \frac{-3ZXY}{4}$;
в) $W = 1 - XZ$;	е) $W = \frac{\dots}{4}$;	и) $W = \frac{-2YZ - 3Z}{5}$.

Задание 3

Дано, что X и Y независимые величины такие, что $D(X) = 3$, $D(Y) = 5$. Найдите ошибку в вычислениях:

$$\begin{aligned} D(3X - 4Y) &= 9D(X) - 16D(Y) = 9 * 3 - 16 * 5 \\ &= -53. \end{aligned}$$

Задание 4

Дисперсия случайной величины X равна 5, а дисперсия случайной величины Y равна 16. X и Y являются независимыми случайными величинами. Найдите дисперсию случайной величины Z , если:

а) $Z = 3Y$;

б) $Z = 2X - 4Y$;

в) $Z = -0,5X + \frac{1}{4}Y$;

г) $Z = \frac{3X-2Y}{2}$;

д) $Z = -3Y - 412$;

е) $Z = -1,1X + 2Y - 0,5$.

Задание 5

Дано совместное распределение двух случайных величин X и Y .

$Y \backslash X$	1	2
-1	0,14	0,26
-2	0,21	0,39

Найдите:

- а) математическое ожидание случайной величины XY ;
- б) дисперсию случайной величины $X + Y$;
- в) математическое ожидание случайной величины $-2XY$;
- г) дисперсию случайной величины $2X - Y$.

Решение задания 5

Чтобы применить свойства математического ожидания и дисперсии, необходимо проверить независимость случайных величин X и Y . Вспомним, что случайные величины X и Y называются независимыми, если для любых x и y выполняется равенство:

$$P((X = x) * (Y = y)) = P(X = x) * P(Y = y).$$

$$P(X = 1) = 0,14 + 0,21 = 0,35; \quad P(X = 2) = 0,26 + 0,39 = 0,65;$$

$$P(Y = -1) = 0,14 + 0,26 = 0,4 \quad ; \quad P(Y = -2) = 0,21 + 0,39 = 0,6;$$

Решение задания 5

$$1) P(X = 1) * P(Y = -1) = 0,35 * 0,4 = 0,14 = P((X = 1) * (Y = -1)).$$

$$2) P(X = 1) * P(Y = -2) = 0,35 * 0,6 = 0,21 = P((X = 1) * (Y = -2)).$$

$$3) P(X = 2) * P(Y = -1) = 0,65 * 0,4 = 0,26 = P((X = 2) * (Y = -1)).$$

$$4) P(X = 2) * P(Y = -2) = 0,65 * 0,6 = 0,39 = P((X = 2) * (Y = -2)).$$

Значит, случайные величины X и Y независимы.

X	1	2
P	0,35	0,65

Y	-1	-2
P	0,4	0,6

Решение задания 5(а)

X	1	2
P	0,35	0,65

Y	-1	-2
P	0,4	0,6

$$M(X) = 1 * 0,35 + 2 * 0,65 = 1,65;$$

$$M(Y) = -1 * 0,4 - 2 * 0,6 = -1,6;$$

Таким образом, $M(XY) = 1,65 * (-1,6) = -2,64$.

Решение задания 5(б-г)

X^2	1	4
P	0,35	0,65

Y^2	1	4
P	0,4	0,6

$$\text{б) } M(X^2) = 1 * 0,35 + 4 * 0,65 = 2,95;$$

$$M(Y^2) = 1 * 0,4 + 4 * 0,6 = 2,8;$$

Таким образом, $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 2,95 - 1,65^2 = 0,2275$ и

$$D(Y) = M(Y^2) - (M(Y))^2 = 2,8 - (-1,6)^2 = 0,24.$$

Значит, $D(X + Y) = D(X) + D(Y) = 0,2275 + 0,24 = 0,4675$.

$$\text{в) } M(-2XY) = -2 * (-2,64) = 5,28.$$

$$\text{г) } D(2X - Y) = 4 * 0,2275 + 0,24 = 1,15.$$

Задание 6

Проводник, сопротивление которого зависит от случайных обстоятельств, проводит электрический ток, сила которого также зависит от случая. Известно, что среднее значение сопротивления проводника R равно 20 Ом, а средняя сила тока I равна 4 А. Найдите среднее значение напряжения тока, если известно, что сопротивление и сила тока независимы.

Задание 7

Случайные величины X и Y независимы и имеют соответствующие законы распределения:

X	1	2	3
P	0,2	0,5	0,3

Y	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,4	0,3

Найдите:

а) $D(2X + 3Y)$; в) $M(-2XY)$;

б) $D(3X - 4Y)$; г) закон распределения XY .

Решение задания 7

Вычислим $M(X) = 1 * 0,2 + 2 * 0,5 + 3 * 0,3 = 2,1$ и

$M(Y) = -1 * 0,1 + 0 * 0,2 + 1 * 0,4 + 2 * 0,3 = 0,9$.

Составим законы распределения для величин X^2 и Y^2 .

X^2	1	4	9
P	0,2	0,5	0,3

Y^2	0	1	4
P	0,2	0,5	0,3

Вычислим $M(X^2) = 1 * 0,2 + 4 * 0,5 + 9 * 0,3 = 4,9$;

$M(Y^2) = 0 * 0,2 + 1 * 0,5 + 4 * 0,3 = 1,7$;

Таким образом, $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 4,9 - 2,1^2 = 0,49$ и

$D(Y) = M(Y^2) - (M(Y))^2 = 1,7 - 0,9^2 = 0,89$.

Решение задания 7

а) $D(2X + 3Y) = 4D(X) + 9D(Y) = 4 * 0,49 + 9 * 0,89 = 9,97.$

б) $D(3X - 4Y) = 9D(X) + 16D(Y) = 9 * 0,49 + 16 * 0,89 = 18,65.$

в) $M(-2XY) = -2M(X)M(Y) = -2 * 2,1 * 0,9 = -3,78.$

г)

XY	-1	0	1	2
1	-1	0	1	2
2	-2	0	2	4
3	-3	0	3	6

XY	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	6
P	0,03	0,05	0,02	0,2	0,08	0,26	0,12	0,15	0,09

Задание 8

Дискретная случайная величина X имеет закон распределения:

X	-1	2	3	4
P	0,1	0,3	0,2	0,4

Найдите среднее квадратичное отклонение случайной величины $Y = X^2 - 2X + 3$ двумя способами. Ответ округлите до сотых.

Способ 1

Найдем значения случайной величины Y .

$$y_1 = 1 + 2 + 3 = 6, y_2 = 4 - 4 + 3 = 3, y_3 = 9 - 6 + 3 = 6,$$

$$y_4 = 16 - 8 + 3 = 11.$$

Найдем вероятности значений случайной величины Y .

$$P(Y = 6) = 0,1, \quad P(Y = 3) = 0,3 + 0,2 = 0,5,$$

$$P(Y = 11) = 0,4$$

Имеем:

Y	3	6	11
P	0,3	0,3	0,4

$$\text{Значит, } M(Y) = 3 * 0,3 + 6 * 0,3 + 11 * 0,4 = 7,1.$$

Составим закон распределения для случайной величины Y^2 .

Y^2	9	36	121
P	0,3	0,3	0,4

$$\text{Значит, } M(Y^2) = 9 * 0,3 + 36 * 0,3 + 121 * 0,4 = 61,9.$$

$$\text{Таким образом, } D(Y) = M(Y^2) - (M(Y))^2 = 61,9 - 50,41 = 11,49.$$

$$\text{Значит, } \sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{11,49} \approx 3,39.$$

Способ 2

Найдем значения случайной величины Y .

$$y_1 = 1 + 2 + 3 = 6, y_2 = 4 - 4 + 3 = 3, y_3 = 9 - 6 + 3 = 6, \\ y_4 = 16 - 8 + 3 = 11.$$

Найдем вероятности значений случайной величины Y .

$$P(Y = 6) = 0,1, \quad P(Y = 3) = 0,3 + 0,2 = 0,5, \quad P(Y = 11) = 0,4.$$

Имеем:

Y	3	6	11
P	0,3	0,3	0,4

$$\text{Значит, } M(Y) = 3 * 0,3 + 6 * 0,3 + 11 * 0,4 = 7,1.$$

Воспользуемся определением дисперсии: $D(Y) = M(Y - M(Y))^2$.

$(Y - M(Y))^2$	$(-4,1)^2$	$(-1,1)^2$	$(3,9)^2$
P	0,3	0,3	0,4

$$\text{Таким образом, } D(Y) = M(Y - M(Y))^2 = 16,81 * 0,3 + 1,21 * 0,3 + 15,21 * 0,4 = 11,49.$$

$$\text{Значит, } \sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{11,49} \approx 3,39.$$