

Филиал МОУ-СОШ с. Подлесное Марковского района- ООШ с. Ястребовка
Марковского района

Доклад
тема: «Квадратные уравнения»

Подготовили:

Адодин Артём Сергеевич
Обучающийся 7 класса
Научный руководитель: Храпугина Е.Н.

С. Ястребовка, 2024 г

Решение квадратных уравнений различными способами

Целью работы было формирование умения решать квадратные уравнения. Исходя из этой цели, были проведена следующая работа: изучена история возникновения и решения квадратных уравнений, проанализированы школьные учебники, рассмотрены формулы для решения квадратных уравнений. В работе так же представлена практическая часть. В результате данной работы сформировано умение решать квадратные уравнения.

Квадратные уравнения находят широкое применение при решении тригонометрических, показательных, логарифмических, иррациональных и трансцендентных уравнений и неравенств.

Однако, значение квадратных уравнений заключается не только в изяществе и краткости решения задач, хотя и это весьма существенно. Не менее важно и то, что в результате применения квадратных уравнений при решении задач не редко обнаруживаются новые детали, удастся сделать интересные обобщения и внести уточнения, которые подсказываются анализом полученных формул и соотношений

1. Различные способы решения квадратных уравнений. (изучаемые в школьным курсе алгебры)

- 1) Разложение левой части уравнения на множители
- 2) Метод выделения полного квадрата
- 3) Решение квадратных уравнений по формуле
- 4) Решение уравнений с использованием теоремы Виета
- 5) Графическое решение квадратного уравнения

2. Различные способы решения квадратных уравнений. (не изучаемые в школьным курсе алгебры)

6) Решение уравнений способом «переброски»

Рассмотрим квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0.$$

Умножая обе его части на a , получаем уравнение

$$a^2 x^2 + a bx + ac = 0.$$

Пусть $ax = y$, откуда $x = \frac{y}{a}$; тогда приходим к уравнению

$$y^2 + by + ac = 0,$$

равносильного данному. Его корни y_1 и y_2 найдем с помощью теоремы

Виета. Окончательно получаем $x_1 = \frac{y_1}{a}$ и $x_2 = \frac{y_2}{a}$. При этом способе

коэффициент a умножается на свободный член, как бы «перебрасывается» к нему, поэтому его и называют способом «переброски». Этот способ применяют, когда можно легко найти корни уравнения, используя теорему Виета и, что самое важное, когда дискриминант есть точный квадрат.

Решим уравнение $2x^2 - 11x + 15 = 0$.

Решение. «Перебросим» коэффициент 2 к свободному члену, в результате получим уравнение

$$y^2 - 11y + 30 = 0. \text{ Согласно теореме Виета } \begin{cases} y_1 = 6 \\ y_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{6}{2} \\ x_2 = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2,5 \end{cases}$$

Ответ: 2,5;3.

7) Свойства коэффициентов квадратного уравнения.

Пусть дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.

1. Если $a + b + c = 0$ (т.е. сумма коэффициентов уравнения равна нулю), то $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a}$.

Доказательство. Разделим обе части уравнения на $a \neq 0$, получим приведенное квадратное уравнение $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Согласно теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

По условию $a + b + c = 0$, откуда $b = -a - c$. Значит, $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{-a-c}{a} = 1 + \frac{c}{a} \\ x_1 x_2 = 1 \cdot \frac{c}{a} \end{cases}$

Получаем $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a}$, что и требовалось доказать.

2. Если $a - b + c = 0$, или $b = a + c$, то $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{c}{a}$.

Доказательство. По теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

По условию $a - b + c = 0$, откуда $b = a + c$. Таким образом,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{-a+b}{a} = -1 - \frac{c}{a} \\ x_1 x_2 = -1 \cdot \left(-\frac{c}{a}\right) \end{cases} \text{ т.е. } x_1 = -1 \text{ и } x_2 = \frac{c}{a}, \text{ что и требовалось доказать.}$$

1. Решим уравнение $345x^2 - 137x - 208 = 0$.

Решение. Так как $a + b + c = 0$ ($345 - 137 - 208 = 0$), то $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-208}{345}$.

Ответ: $1; -\frac{208}{345}$.

2. Решим уравнение $132x^2 + 247x + 115 = 0$

Решение. Т. к. $a - b + c = 0$ ($132 - 247 + 115 = 0$), то

$$x_1 = -1, x_2 = -\frac{115}{132} \quad \text{Ответ: } -1; -\frac{115}{132}$$

8) Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки.

Графический способ решения квадратных уравнений с помощью параболы неудобен. Если строить параболу по точкам, то потребуется много времени, и при этом степень точности получаемых результатов невелика.

Предлагаем следующий способ нахождения корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ с помощью циркуля и линейки.

Решим графически уравнение $x^2 - 2x - 3 = 0$.

Решение. Определим координаты точки центра окружности по формулам:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1, \quad y = \frac{a+c}{2a} = \frac{1-3}{2 \cdot 1} = -1.$$

Проведем окружность радиуса SA , где $A(0;1)$.



Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

9) Решение квадратных уравнений с помощью номограммы.

Это старый и незаслуженно забытый способ решения квадратных уравнений, помещенный на с.83 (см. Брадис В.М. Четырехзначные математические таблицы. – М., Просвещение, 1990).

Таблица XXII. Номограмма для решения уравнения $z^2 + pz + q = 0$. Эта номограмма позволяет, не решая квадратного уравнения, по его коэффициентам определить корни уравнения.

1. Для уравнения

$$z^2 - 9z + 8 = 0.$$

Номограмма дает корни

$$z_1 = 8, 0 \text{ и } z_2 = 1, 0 \text{ (рис. 12).}$$

2. Решим с помощью номограммы уравнение

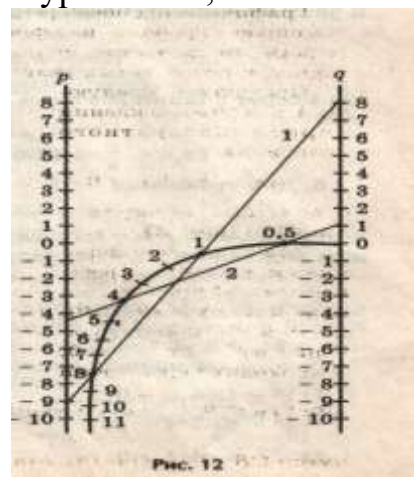
$$2z^2 - 9z + 2 = 0.$$

Разделим коэффициенты этого

уравнения на 2, получим уравнение

$$z^2 - 4,5 + 1 = 0.$$

Номограмма дает корни $z_1 = 4$ и $z_2 = 0,5$.



10). Геометрический способ решения квадратных уравнений.

В древности, когда геометрия была более развита, чем алгебра, квадратные уравнения решали не алгебраически, а геометрически. Приведем ставший знаменитым пример из «Алгебры» ал-Хорезми.

Решим уравнение $x^2 + 10x = 39$.

В оригинале эта задача формулируется следующим образом: «Квадрат и десять корней равны 39».

Решение. Рассмотрим квадрат со стороной x , на его сторонах строятся прямоугольники так, что другая сторона каждого из них равна $2\frac{1}{2}$,

следовательно, площадь каждого равна $2\frac{1}{2}x$. Полученную фигуру дополняют затем до нового квадрата ABCD, достраивая в углах четыре равных квадрата, сторона каждого из них $2\frac{1}{2}$, а площадь $6\frac{1}{4}$.

D	x	C
$6\frac{1}{4}$.	$2\frac{1}{2}x$	$6\frac{1}{4}$.
$2\frac{1}{2}x$	x^2	$2\frac{1}{2}x$
$6\frac{1}{4}$.	$2\frac{1}{2}x$	$6\frac{1}{4}$.

A x B

Площадь S квадрата ABCD можно представить как сумму площадей: первоначального квадрата x^2 , четырех прямоугольников

($4 \cdot 2\frac{1}{2}x = 10x$) и четырех пристроенных квадратов($6\frac{1}{4} \cdot 4 = 25$), т.е.

$S = x^2 + 10x + 25$. Заменяя $x^2 + 10x$ числом 39, получим что $S = 39 + 25 = 64$, откуда следует, что сторона квадрата ABCD, т.е. отрезок $AB = 8$. Для искомой стороны x первоначального квадрата получим $x = 8 - 2\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} = 3$

Список литературы

1. Математика. Алгебра. Функции. Анализ данных. 8 класс: Учебник для общеобразовательных учреждений / Г. В. Дорофеев и др. – М.: Дрофа, 2004
2. Гусев В. А., Мордкович А. Г. Математика: Справочные материалы: Книга для учащихся. – М.: Просвещение, 1988
3. Глейзер Г. И. История математики в школе. – М.: просвещение, 1982
4. Брадис В. М. Четырехзначные математические таблицы для средней школы. – м., просвещение, 1990
5. Окунев А. К. Квадратичные функции, уравнения и неравенства. Пособие для учителя. – М.: Просвещение, 1972
6. Пресман А.А. Решение квадратного уравнения с помощью циркуля и линейки. М., Квант, №4/72. С.34.
7. Дидактические материалы по алгебре.
8. М., Математика (приложение к газете «Первое сентября»), №№ 21/96, 10/97, 24/97, 40/2000.