

Синус, косинус и тангенс двойного угла

Авторы:
Сибирева Е.М.
МАОУ СОШ №59
г. Екатеринбург

Цель урока:

- вывести формулы двойного угла для синуса, косинуса и тангенса;
- рассмотреть применение формул в тригонометрических выражениях

Повторение

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

Задание:

- преобразовать выражение $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

Решение:

$$\begin{aligned} \bullet \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right) &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos x + \sin \frac{\pi}{4} \sin x \right) = \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) = \cos x + \sin x \end{aligned}$$

Тренажер

- Значение тригонометрических выражений
- <https://learningapps.org/2250331>

Понятие двойного угла

- **Двойной угол** - это угол, который в два раза больше предыдущего.
- $\alpha + \alpha = 2\alpha$
- Пример: $\alpha = 30^0$, значит $2\alpha = 60^0$

Вывод формул:

- Выведем формулы двойного угла через формулы суммы и разности
- $\sin 2a =$
- $\cos 2a =$

$\sin 2a$

$$\sin 2a = \sin(a + a) = \sin a \cos a + \sin a \cos a = \\ = 2 \sin a \cos a$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$\cos 2a$

$$\cos 2d = \cos(d + d) = \cos d \cos d - \sin d \sin d = \\ = \cos^2 d - \sin^2 d$$

$$\cos 2d = \cos^2 d - \sin^2 d$$

Trigonómico $\sin^2 d + \cos^2 d = 1$

$$1) \sin^2 d = 1 - \cos^2 d \Rightarrow \cos 2d = \cos^2 d - (1 - \cos^2 d) = \\ = \cos^2 d - 1 + \cos^2 d = 2\cos^2 d - 1$$

$$\cos 2d = 2\cos^2 d - 1$$

$$2) \cos^2 d = 1 - \sin^2 d \Rightarrow \cos 2d = 1 - \sin^2 d - \sin^2 d = \\ = 1 - 2\sin^2 d$$

$$\cos 2d = 1 - 2\sin^2 d$$

Самостоятельная работа

- Самостоятельно выразить $\operatorname{tg} 2a$

$$\operatorname{tg} 2a =$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 2d &= \operatorname{tg}(d + d) = \frac{\operatorname{tg} d + \operatorname{tg} d}{1 - \operatorname{tg} d \cdot \operatorname{tg} d} = \\ &= \frac{2 \operatorname{tg} d}{1 - \operatorname{tg}^2 d} \\ \operatorname{tg} 2d &= \frac{2 \operatorname{tg} d}{1 - \operatorname{tg}^2 d}\end{aligned}$$

Практика

Вычислить $\sin 2\alpha$, если $\sin \alpha = -0,6$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Вычислить $\cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = 0,3$.

Упростить выражение $\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 - 2 \sin^2 \alpha}$.

Вычислить $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$.

Вычислить $\sin 3\alpha$, если $\sin \alpha = \frac{1}{4}$.

$$\sin 2d = ? , \text{ ecmu } \sin d = -0,6 \quad \pi < d < \frac{3\pi}{2}$$

$$\sin 2d = 2 \sin d \cos d = \quad d \in \underline{\text{III}} \text{ u}$$

$$= 2 \cdot (-0,6) \cdot \cos d = 2 \cdot (-0,6) \cdot \left(-\sqrt{1 - \sin^2 d} \right) =$$

$$= -1,2 \cdot \left(-\sqrt{1 - 0,36} \right) = -1,2 \cdot \left(-\sqrt{0,64} \right) =$$

$$= -1,2 \cdot (-0,8) = 0,96$$

2

$\cos 2\alpha = ?$, wenn $\cos \alpha = 0,3$

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 0,09 - (1 - \cos^2 \alpha) = \\ &= 0,09 - 1 + \cos^2 \alpha = 0,09 - 1 + 0,09 = \\ &= 0,18 - 1 = -0,82\end{aligned}$$

Упростите выражение $\frac{\sin d \cdot \cos d}{1 - 2 \sin^2 d}$

$$\frac{\sin d \cdot \cos d}{1 - 2 \sin^2 d} = \frac{2 \sin d \cdot \cos d}{2(1 - 2 \sin^2 d)} =$$

4. и 3. используем $1 = \sin^2 d + \cos^2 d$

$$= \frac{2 \sin d \cdot \cos d}{2(\sin^2 d + \cos^2 d - 2 \sin^2 d)} = \frac{2 \sin d \cos d}{2(\cos^2 d - \sin^2 d)} =$$

$$= \frac{2 \sin d \cos d}{2 \cdot \cos 2d} = \frac{\sin 2d}{2 \cos 2d} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2d$$

Выведем $\operatorname{tg} 2d$, $\operatorname{tg} d = \frac{1}{2}$

$$\operatorname{tg} 2d = \frac{2 \operatorname{tg} d}{1 - \operatorname{tg}^2 d} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$\sin 3\alpha = ?, \text{ karena } \sin \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \sin 3\alpha &= \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin \alpha \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cos \alpha = \\ &= \sin \alpha \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \alpha = \\ &= \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha + 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha = \\ &= 3 \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha = 3 \cdot \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) - \\ &\quad - \sin^3 \alpha = 3 \sin \alpha - 3 \sin^3 \alpha - \sin^3 \alpha = \\ &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha = 3 \cdot \frac{1}{4} - 4 \cdot \frac{1}{64} = \frac{3}{4} - \frac{1}{16} = \\ &= \frac{12-1}{16} = \frac{11}{16} \end{aligned}$$

Итоги урока

1. Какой угол называется двойной?
2. Попробуйте записать по памяти в тетрадь одну из формул
3. Что было сложно на уроке?
4. Оцените свою деятельность на уроке

Домашнее задание

- Параграф 29 стр. 149 - 150 №498

Дополнительные материалы

- Видеоуроки:
- https://www.youtube.com/watch?time_continue=2&v=dcS8RhjFYys&feature=emb_title
- <https://resh.edu.ru/subject/lesson/3489/main/78831/>
- Тренировочные задания:
- <https://resh.edu.ru/subject/lesson/3489/train/78835/>

Все формулы двойного угла

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \cos 2\alpha &= 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$$

Синус, косинус и тангенс двойного угла

Авторы:
Сибирева Е.М.
МАОУ СОШ №59
г.Екатеринбург