

Класс: 10

Тема урока: Исследование функции и построение графиков с помощью производной.

Цель: научиться строить график функции, применяя производную для исследования функции

Задачи:

- развивать мышление и навыки аналитической работы при выполнении проектной деятельности;

- формировать навыки оформления результатов умственного труда;

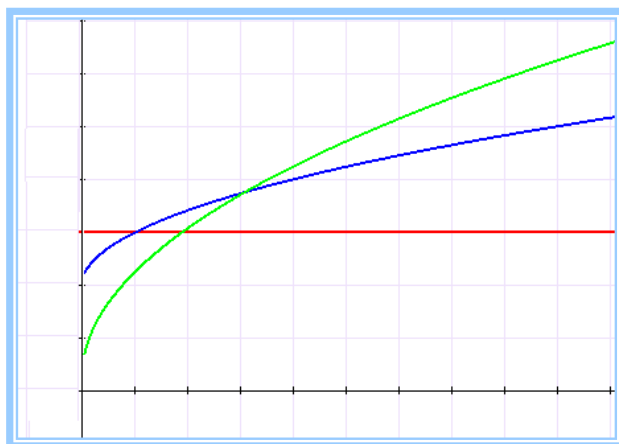
- воспитывать умение работать в группе: «чувство локтя» и индивидуальную ответственность за достижение результата.

Оборудование: проектор, экран, презентации учителя и учащихся

Ход урока

1.Организационный момент

Ребята ни для кого не секрет, что каждая наука оперирует своей лексикой. И «Неважно сколько ученик знает, но важно, чтобы у него была положительная производная». А вы можете прояснить мою фразу? (Это означает важно, чтобы скорость приращения знаний у ученика была положительна – это залог того, что его знания возрастут). Подумайте, как бы вы могли охарактеризовать три разные кривые роста знаний, изображённые на рисунке.



Какую аналитическую деятельность вы сейчас осуществляли относительно функций? (Исследование). Для чего нужно исследование функций? (Для построения графиков). Какова тема нашего урока?

Тема нашего урока – исследование функции и построение графиков с помощью производной.

Цель урока – научиться строить график функции, применяя производную для исследования функции.

2.Актуализация опорных знаний и действий учащихся

Задание. Построить графики функций и, используя графики, найдите точки экстремума (заполните таблицу):

№	Функция	Точки минимума $X_{\min}$	Точки максимума $X_{\max}$
---	---------	------------------------------	-------------------------------

1)	$y=x^3-6x^2+9x-4$		
2)	$y=\frac{2}{x}+\frac{x}{2}$		
3)	$y=\sqrt{8-8x-x^2}$		
4)	$y=x^3-9x$		
5)	$y=\sqrt{2x-x^2}-2$		

3.Представление проектов учащихся

В классе заранее были определены 3 группы учащихся, каждая группа получила задание для проектов.

Ранее мы уже рассматривали вопросы об исследовании функций, основным объектом исследования для нас был график, по нему мы определяли свойства функции. Но в рассмотренных примерах мы убедились, что график не всегда даёт исчерпывающую информацию о функции.

(Далее учащиеся представляют результаты своих проектных работ)

Проект №1 «Построение графика функции в виртуальной лаборатории»

Трудно найти черную кошку в тёмной комнате, особенно если ее там нет.

Задание: построить график функции $f(x)=\sqrt{2x-x^2}-2$ с помощью виртуальной лаборатории «Графики функций».

Вы сейчас ввели эту функцию в редактор формул виртуальной лаборатории. При выполнении задания возникла *проблема*, мы столкнулись с тем, что графика не видно. Мы пытались найти ошибку в записи функции и изменять масштаб, но график не отображался.

Почему же компьютер не показывает график? Мы поняли, что необходимо исследовать, поведение функции. Начали традиционно с выяснения области определения функции и получили неожиданный результат. Подкоренное выражение отрицательно при всех значениях аргумента. Следовательно, график заданной функции не отображался из-за того, что ни при каком действительном значении x функция не определяется.

Вывод: для уточнения графика, важно использовать все этапы исследования функции. Нахождение области определения функции далеко не формальный этап исследования. Он поможет вам не оказываться в роли человека, ищущего черную кошку в тёмной комнате.

Проект №2 «Нахождение точек экстремума по графику функции»

Точность – вежливость королей.

Задание: построить графики функций на компьютере с помощью виртуальной лаборатории и определить по графику их точки экстремума:

а) $f(x)=x^3-9x$;

б) $f(x)=x^3-6x^2+9x-4$

Один из учащихся работает на компьютере с проектором. Он представляет своё решение классу и отмечает, что при определении точек экстремума возникла *проблема*: для функции б) найти точки экстремума с помощью построения графика на компьютере можно точно, а для функции а) – лишь приближённо. а) $x_{\max}=-1,7$; $x_{\min}=1,7$;

б) $x_{\max}=1$; $x_{\min}=3$

Группа учащихся пришла к выводу, что точки экстремума не всегда можно определить точно, используя графический метод. Разрешить проблему можно, применяя аналитический метод. Найдем точки экстремума предложенных функций, используя производную (учащиеся приводят аналитическое решение проблемы)

$$a) x_{\max} = -\sqrt{3}; x_{\min} = \sqrt{3};$$

$$б) x_{\max} = 1; x_{\min} = 3$$

Вывод: аналитический способ нахождения точек экстремума более совершенный по сравнению с графическим. Использование аналитического способа поможет вам быть точными, как короли.

Учитель: Одним из важнейших этапов построения графика функции является определение экстремумов функции и, как вы знаете, это удобно делать с помощью производной.

Сформулируем пункты алгоритма исследования функции на наличие экстремумов. В презентации «Алгоритм исследования функции на наличие экстремумов» слайды перепутаны в последовательности. Используя функцию сортировщик слайдов, расставьте слайды в порядке необходимом для исследования. Мы вспомнили план исследования функции. Через

проектор просматривается план исследования функции .

Проект №3 «Построение графика функции на основании ее исследования»

Если в конце исследования не видно следующего – значит, исследование не доведено до конца

Задание: исследовать функцию $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - 3$ и построить эскиз её графика.

$$1. D(f) = \mathbb{R}.$$

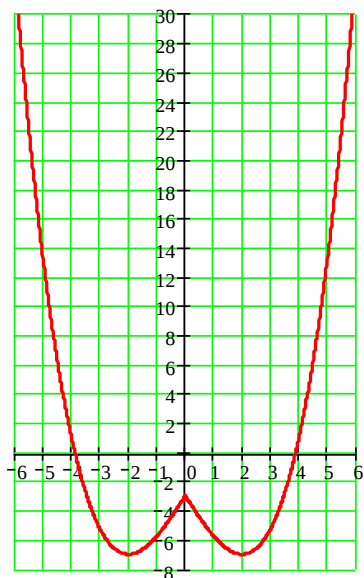
$$2. f'(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4)$$

$$3. D(f') = \mathbb{R}$$

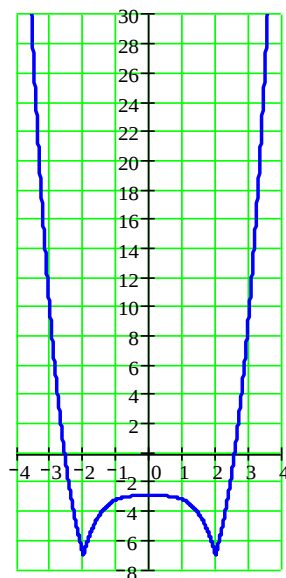
$$4. f'(x) = 0 \text{ при } x=0, x=2, x=-2$$

	$(-\infty; -2)$	$(-2; 0)$	$(0; 2)$	$(2; +\infty)$
	–	+	–	+
	↘	↗	↘	↗
	in	ax	in	ax

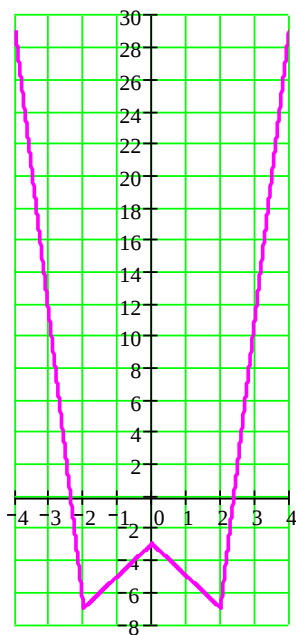
Наносим полученные точки на координатную плоскость. Возникает *проблема*: какой линией соединить имеющиеся точки графика, чтобы она более точно передавала свойства заданной функции? Предлагаем 4 варианта соединения точек. Какой из них верный?



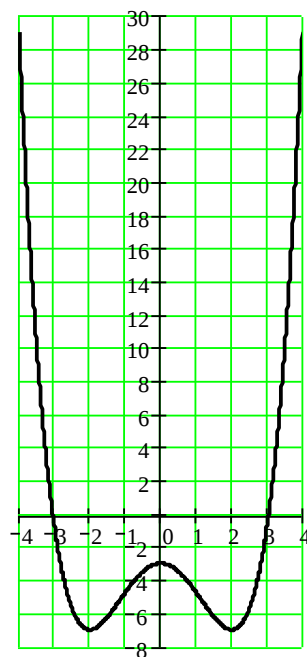
1



2



3



4

Ответить на вопрос, можно вспомнив, что во всех найденных точках экстремумов производная равна нулю. Значит, касательные к графику функции в этих точках должны быть параллельны оси ***OX***. Это возможно только на рисунке 4. Таким образом, линия представленная на рисунке 4 наиболее точно отражает свойства заданной функции.

Вывод: строить график можно, исследуя функцию с помощью производной, при этом нужно использовать не только координаты точек экстремума, но и всю аналитически найденную информацию

4.Углубление изучаемой темы

Аппарат производной позволяет определить, как соединить две полученные точки – по прямой, выпуклостью вниз или выпуклостью вверх.

Для этого используют вторую производную функции.

- Если вторая производная в точке x_0 равна 0, то x_0 - точка перегиба.

- Если вторая производная на интервале больше 0, то на этом интервале график обладает выпуклостью вниз.

- Если вторая производная на интервале меньше 0, то на этом интервале график обладает выпуклостью вверх.

Продолжим уточнение построения графика рассматриваемой функции

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - 3$$

Так как $f'(x) = x^3 - 4x$, то $f''(x) = 3x^2 - 4$

$$f''(x) = 0 \text{ при } x = -\frac{2}{\sqrt{3}}, x = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Причём, при $x < -\frac{2}{\sqrt{3}}$ и $x > \frac{2}{\sqrt{3}}$ вторая производная больше 0, то есть на этих интервалах график обладает выпуклостью вниз.

При $-\frac{2}{\sqrt{3}} < x < \frac{2}{\sqrt{3}}$ вторая производная меньше 0, то есть на этом интервале график обладает выпуклостью вверх. (презентация «Выпуклость»)

5. Выполнение задач, поставленных перед учащимися

Постройте в виртуальной лаборатории график функции $y = x^2$.

Назовите точку минимума, промежутки возрастания и убывания этой функции.

Постройте график производной этой функции, подтвердите по признакам, сделанные выводы.

Что можно сказать о выпуклости графика функции $y = x^2$? Постройте график второй производной этой функции, подтвердите по признаку, сделанный вывод.

Самостоятельно работая в виртуальной лаборатории, исследуйте особенности функции $y = \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$.

6. Итог урока

Какие выводы мы сделали сегодня на уроке:

- для уточнения графика, важно использовать все этапы исследования функции;
- аналитический способ нахождения точек экстремума более совершенный по сравнению с графическим;
- при построении графика при помощи исследования функции с помощью производной нужно использовать всю аналитически найденную информацию.

Проведём блиц-тест для уточнения уровня ваших знаний (презентация «Исследование»).

Блиц-тест показал первый результат работы на уроке.

Сегодня хорошо поработали: повторили способы исследования функции и вспомнили способы её построения, знали, что производная позволяет определить расположение кривой на графике функции.

Чтобы приращение ваших знаний по теме было положительным, работая дома, постарайтесь выполнить максимально посильную для себя работу.

Учитель: Закончить наш урок я хочу словами идеолога современной информатизации обучения Андрея Петровича Ершова: «**Ум компьютера – это ум**

человека, воплощенного в программу». Никакая машина не заменит труд человека, но компьютер может сделать его более эффективным и интересным.

7. Домашнее задание.

Исследуйте любую из предложенных функций, на основе проведённого исследования постройте графики этой функции в тетради, затем проверьте построение графика в виртуальной лаборатории с помощью компьютера.

Задания

:

а) $y = (x+1)^2 (x-2)$ - (средний уровень)

б) $y = \frac{x^2 + 5}{2 - x}$ - (достаточный уровень)

в) $y = x^2 \sqrt{1 - 2x}$ - (высокий уровень)

