

Решение задач текстового характера при подготовке к единому государственному экзамену по математике

Береснева Людмила Анатольевна
учитель математики
МБОУ «Ярцевская средняя школа № 1»

По результатам ЕГЭ 2021 года наша образовательная организация вошла в число школ с низкими результатами по трем предметам. Среди них нет математики. Однако это не означает, что у выпускников нет проблем с ЕГЭ по математике.

Средний балл выпускников по России в 2021 году – всего 55, 1 б. То есть ребята правильно решают немногим больше половины заданий. Средний балл выпускников нашей школы в 2021 году оказался и того меньше – 50, 92 б.

Наибольшую трудность вызывает решение текстовых задач.

Задачи текстового характера подразделяются на несколько типов задач:

- на движение по прямой;
- на движение по окружности;
- на движение по воде;
- на работу;
- на проценты;
- на смеси и сплавы;
- на прогрессии.

Рассмотрим текстовые задачи на работу.

Правила решения таковы:

1. Если объем работы не важен в задаче и нет никаких данных, позволяющих его найти – работа принимается за единицу. Построен дом (один). Написана книга (одна). А вот если речь идет о количестве кирпичей, страниц или построенных домов - работа как раз и равна этому количеству.

Работа = производительность × время

2. Производительность. Чаще за x удобно взять производительность.

$$\text{Производительность} = \frac{\text{работа}}{\text{время}}$$

Если трудятся двое рабочих (два экскаватора, два завода, ...) – их производительности складываются.

3. Время.

$$\text{Время} = \frac{\text{работа}}{\text{производительность}}$$

Покажу, как это я применяю на практике.

Задания № 20 базового уровня из открытого банка заданий ЕГЭ-2022 по математике.

1) Заказ на 110 деталей первый рабочий выполняет на 1 час быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 1 деталь больше?

Так же как в задачах на движение, учу ребят заполнять таблицу.

	работа	производительность	время
1 рабочий	110	$x + 1$	$\frac{110}{x+1}$
2 рабочий	110	x	$\frac{110}{x}$

В задаче спрашивается, сколько деталей в час делает второй рабочий, то есть какова его производительность. Примем её за x . Тогда производительность первого- $x + 1$ (он делает на одну деталь в час больше). Первый рабочий выполнил заказ на час быстрее. Следовательно, его время меньше.

$$\frac{110}{x+1} < \frac{110}{x} \text{ на 1 час}$$

$$\frac{110}{x+1} = \frac{110}{x} - 1$$

...

$$\frac{x^2+x-110}{x(x+1)}=0$$

...

$$x = -11, \quad x = 10,$$

-11, не удовлетворяет условию задачи

Ответ: 10.

2) Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 12 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый, если он за 2 дня выполняет такую же часть работы, какую второй рабочий – за 3 дня.

В этой задаче не сказано о том, чему равен объем. Значит, работу примем за единицу. За x удобно взять производительность первого рабочего, y - производительность второго.

	работа	производительность	время
1 рабочий	1	x	
2 рабочий	1	y	
вместе	1	$x + y$	12 ч

При совместной работе производительности складываются.
 $(x + y) \cdot 12 = 1$

часть работы, выполненная вместе за 1 час, т.е. производительность

$(x + y) \cdot 12 = 1$ — вся работа, что равно 1

$$(x + y) \cdot 12 = 1$$

А по условию задачи: первый рабочий, работая отдельно, за 2 дня выполняет такую же часть работы, какую второй рабочий — за 3 дня.

$$2x = 3y, x = 1,5y$$

$$(1,5y + y) \cdot 12 = 1$$

$$2,5y = \frac{1}{12}$$

$$y = \frac{1}{30}, x = \frac{1,5}{30}, x = \frac{1}{20}.$$

$\frac{1}{20}$ — производительность первого рабочего, значит, его время

Ответ: 20.

3) Первая труба пропускает на 1 литр воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 110 литров она заполняет на 2 минуты дольше, чем вторая труба заполняет резервуар объемом 99 литров?

	работа	производительность	время
1 труба	110	x	$\frac{110}{x}$
2 труба	99	$x + 1$	$\frac{99}{x+1}$

Первая труба заполняет на 2 минуты дольше (значит, больше)
 $\frac{110}{x} > \frac{99}{x+1}$ на 2 дня

$$\frac{110}{x} - \frac{99}{x+1} = 2$$

$$\frac{2x^2 - 9x - 110}{x(x+1)} = 0$$

$$x = -5, 5, \quad x = 10,$$

-5,5, не удовлетворяет условию задачи

Ответ: 10.

4) Андрей и Паша красят забор за 9 часов. Паша и Володя - за 12 часов, а Володя и Андрей- за 18 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая вместе?

Здесь работают трое. Значит и переменных будет 3.

	работа	производительность	время
Андрей	1	x	
Паша	1	y	
Володя	1	z	
Вместе	1	$x + y + z$	$\frac{1}{x + y + z} - ?$

$$(x + y)9 = 1, \quad x + y = \frac{1}{9}$$

$$(y + z)12 = 1, \quad y + z = \frac{1}{12} \quad (x + z)18 = 1, \quad x + z = \frac{1}{18}$$

Сложим все три уравнения.

$$2x + 2y + 2z = \frac{4+3+2}{36}$$

$$x + y + z = \frac{9}{36} : 2$$

$$x + y + z = \frac{1}{8}$$

$$\text{Производительность} = \frac{\text{работа}}{\text{время}}$$

Время- 8 часов

Ответ: 8

5). Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 15 часов. Через три часа после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй, и работу над заказом довели до конца уже вместе. Сколько часов потребовалось для выполнения всего заказа?

	работа	производительность	время
1 рабочий	1	$\frac{1}{15}$	15
2 рабочий	1	$\frac{1}{15}$	15

$\frac{3}{15}$ всей работы выполнил первый рабочий за 3 часа

$\frac{1}{15} + \frac{1}{15} = \frac{2}{15}$ - производительность первого и второго рабочих вместе

t часов работали рабочие вместе

$\frac{2}{15} t$ всей работы выполнили рабочие за t часов

$$\frac{3}{15} + \frac{2}{15} t = 1$$

...

$$t = 6$$

$$3 + 6 = 9$$

Ответ: 9.

6). Один мастер может выполнить заказ за 12 часов, а другой – за шесть часов. За сколько часов выполнят работу оба мастера, работая вместе?

	работа	производительность	время
1 рабочий	1	$\frac{1}{12}$	12
2 рабочий	1	$\frac{1}{6}$	6

$$\frac{1}{12}$$

$$+\frac{1}{6}=\frac{1+2}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}-\text{совместная производительность рабочих}$$

Следовательно, время их работы- 4 часа

Ответ: 4.

7). Первый насос заполняет бассейн за 20 минут, второй – за 30 минут, а третий – за 1 час. За сколько минут наполнят бассейн три насоса, работая одновременно?

	работа	производительность	время
1 насос	1	$\frac{1}{20}$	20 минут
2 насос	1	$\frac{1}{30}$	30 минут
3 насос	1	$\frac{1}{60}$	1 час=60 минут

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60} = \frac{3+2+1}{60} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10} - \text{общая производительность.}$$

Следовательно, время равно 10 минутам.

Ответ: 10.

8). Даша и Маша пропалывают грядку за 12 минут, а одна Маша – за 20 минут. За сколько минут пропалывает грядку одна Даша?

	работа	производительность	время
Даша	1	$\frac{1}{x}$	?
Маша	1	$\frac{1}{20}$	20
Даша и Маша	1	$\frac{1}{12}$	12

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{20} = \frac{1}{12}$$

...

$$x=30$$

Ответ: 30.

9). Две трубы наполняют бассейн за 3 часа 36 минут, а одна первая труба наполняет бассейн за 6 часов. За сколько часов наполняет бассейн одна вторая труба?

	работа	производительность	время
1 труба	1	$\frac{1}{6}$	6 ч
2 труба	1	x	?
1 труба и 2 труба	1	$\frac{5}{18}$	$3 \text{ ч} 36 \text{ мин} = \frac{216}{60} \text{ ч} = \frac{18}{5} \text{ ч}$

$$x + \frac{1}{6} = \frac{5}{18}$$

$$\dots$$

$$x = 9$$

Ответ: 9.

10). Первая труба наполняет резервуар на 6 минут дольше, чем вторая. Обе трубы наполняют этот же резервуар за 4 минуты. За сколько минут наполняет этот резервуар одна вторая труба?

	работа	производительность	время
1 труба	1	$\frac{1}{t+6}$	На 6 мин дольше $t + 6$
2 труба	1	$\frac{1}{t}$	$t - ?$
вместе	1	$\frac{1}{4}$	4

$$\frac{1}{t+6} + \frac{1}{t} = \frac{1}{4}$$

$$\dots$$

$$t = -4, t = 6$$

-4 не удовлетворяет условию задачи.

6 минут - время работы второй трубы.

Ответ: 6.

11). В помощь садовому насосу, перекачивающему 5 литров воды за 2 минуты, подключили второй насос, перекачивающий тот же объем воды за 3 минуты. Сколько минут должны работать эти два насоса совместно, чтобы перекачать 25 литров воды?

	работа	производительность	время
1 насос	5л	$\frac{5}{2}$	2 мин
2 насос	5л	$\frac{5}{3}$	3 мин
1и 2 вместе	25 л		?

$$\frac{5}{2} + \frac{5}{3} = \frac{15+10}{6} = \frac{25}{6} - \text{производительность насосов}$$

$25 : \frac{25}{6} = \frac{25 \cdot 6}{25} = 6(\text{мин})$ - столько минут должны работать эти два насоса совместно

Ответ: 6.

12). Петя и Ваня выполняют одинаковый тест. Петя отвечает за час на 8 вопросов теста, а Ваня на 9. Они одинаково начали отвечать на вопросы теста. Петя закончил позже Вани на 20 минут. Сколько вопросов содержит тест?

	работа	производительность	время
Петя	$x - ?$	$\frac{8 \text{ вопросов}}{60 \text{ минут}}$	$x : \frac{8}{60} = \frac{60}{8} x = 7,5 x$
Ваня	$x - ?$	$\frac{9 \text{ вопросов}}{60 \text{ минут}}$	$x : \frac{9}{60} = \frac{60}{9} x = \frac{20}{3} x$

Петя закончил позже Вани на 20 минут, значит его время на 20 минут больше.

$$7,5 x - \frac{20}{3} x = 20$$

$$22,5 x - 20 x = 60$$

$$\dots$$

$$x = 24$$

Ответ: 24.

13). Плиточник должен уложить 175 м^2 плитки. Если он будет укладывать в день на 10 м^2 больше, чем планировал, то закончит работу на два дня раньше. Сколько квадратных метров плитки в день планирует укладывать плиточник?

	работа	производительность	время
--	--------	--------------------	-------

По плану	175	$x-?$	$\frac{175}{x}$
На самом деле	175	$x+10$	$\frac{175}{x+10}$

На 2 дня раньше, значит, времени затратит меньше.

$$\frac{175}{x} - \frac{175}{x+10} = 2$$

...

$$x^2 + 10x - 875 = 0$$

...

$$x = -35, x = 25$$

Условию задачи удовлетворяет только 25.

Ответ: 25.

Задания №8 профильного уровня

1). Винни-Пух съедает банку мёда за 4 часа. Пятачок половину такой же банки – за 8 часов. За сколько минут они съедят банку меда вместе?

	работа	производительность	время
Винни-Пух	банка мёда 1	$\frac{1}{240}$	4 ч = 240 мин
Пятачок	0,5	$\frac{0,5}{480} = \frac{5}{4800} = \frac{1}{960}$	8 ч = 480 мин
Вместе	1	$\frac{1}{240} + \frac{1}{960} = \frac{4+1}{960} = \frac{5}{960} = \frac{1}{192}$	?

$$\text{Время} = \frac{\text{работа}}{\text{производительность}}$$

$1 : \frac{1}{192} = 192$ (мин) - за столько минут Винни-Пух и Пятачок и съедят банку меда вместе.

Ответ: 192.

2). Мастер выполняет заказ за 4 часа, ученик – за 5 часов. За сколько часов выполнят 9 таких заказов мастер и ученик, работая вместе?

	работа	производительность	время
--	--------	--------------------	-------

Мастер	1	$\frac{1}{4}$	4 ч
Ученик	1	$\frac{1}{5}$	5 ч
Вместе	9	$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{5+4}{20} = \frac{9}{20}$	?

$9 : \frac{9}{20} = 20(\text{ч})$ - за сколько часов выполнят 9 таких заказов мастер и ученик, работая вместе.

Ответ: 20.

3). Винни-Пух съел половину горшочка мёда за 40 минут, после чего к нему зашел его друг Пятачок, и оставшиеся полгоршочка они доели за 30 минут вместе. За сколько часов может съесть один Пятачок горшочек мёда?

	работа	производительность	время
Винни-Пух	0,5	$\frac{0,5}{40} = \frac{5}{400} = \frac{1}{80}$	40 мин
Пятачок	1	$\frac{1}{t}$	t - ?
Вместе	0,5	$\frac{0,5}{30} = \frac{5}{300} = \frac{1}{60}$	30 мин

$$\frac{1}{80} + \frac{1}{t} = \frac{1}{60}$$

$$\frac{1}{t} = \frac{4-3}{240}$$

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{240}$$

$$t = 240$$

$$240 \text{ мин} = \frac{240}{60} \text{ ч} = 4 \text{ ч}$$

Ответ: 4.

4). Один мальчик красит картинку за 4 минуты, второй – за 6 минут. Они решили вместе покрасить картинку двумя способами. Первый способ – каждый красит ровно половину картинки (а потом ждёт, пока другой не закончит). Второй способ – красят вместе от начала до конца. На сколько минут больше потребуется для покраски картинки первым способом?

	работа	производительность	время
--	--------	--------------------	-------

1 мальчик	1	$\frac{1}{4}$	4 мин
2 мальчик	1	$\frac{1}{6}$	6 мин

Первый способ: 1 мальчик покрасил за 2 минуты и ждёт минуту, пока 2 мальчик покрасит (время второго мальчика-3 минуты). Следовательно, время покраски первым способом- 3 минуты.

Второй способ: $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3+2}{12} = \frac{5}{12}$ - общая производительность

$1 : \frac{5}{12} = \frac{12}{5} = 2,4$ (мин) - время покраски вторым способом

$3 - 2,4 = 0,6$ (мин) - на столько минут больше потребуется для покраски картинки первым способом.

Ответ: 0,6.

5). При двух одновременно работающих принтерах расход бумаги составляет одну пачку за 12 минут. За сколько минут израсходует пачку бумаги первый принтер, если он сделает это на 10 минут быстрее, чем второй?

	работа	производительность	время
1 принтер	1	$\frac{1}{t}$	t -? (на 10 мин быстрее)
2 принтер	1	$\frac{1}{t+10}$	t +10
вместе	1	$\frac{1}{12}$	12 мин

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t+10} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{12t+120+12t-t^2-10t}{12t(t+10)} = 0$$

...

$$t^2 - 14t - 120 = 0$$

...

$$t = -6, t = 20$$

-6 не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 20.

6). Четыре мастера выкладывают стену за 4 часа. Если первый, второй и третий работают, то они сделают эту работу за 6 часов, а второй, третий и четвертый – за 5 часов такой же объем работы. За сколько часов справятся с работой первый и четвертый мастера?

	работа	производительность	время
1 мастер	1	x	
2 мастер	1	y	
3 мастер	1	z	
4 мастер	1	k	
вместе	1	$x + y + z + k$	4 ч
1,2 и 3	1	$x + y + z$	6 ч
2,3 и 4	1	$y + z + k$	5 ч
1 и 4	1	$x + k$	?

$$1. x + y + z + k = \frac{1}{4}$$

$$2. x + y + z = \frac{1}{6}$$

$$3. y + z + k = \frac{1}{5}$$

$$(x + y + z + k) - (y + z + k) = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$$

$$x = \frac{5-4}{20} = \frac{1}{20}$$

$$(x + y + z + k) - (x + y + z) = \frac{1}{4} - \frac{1}{6}$$

$$k = \frac{3-2}{12} = \frac{1}{12}$$

$$x + k = \frac{1}{20} + \frac{1}{12} = \frac{3+5}{60} = \frac{8}{60} = \frac{2}{15} - \text{производительность первого и четвёртого}$$

1: $\frac{2}{15} = \frac{15}{2} = 7,5(\text{ч})$ - за столько часов справятся с работой первый и четвертый мастера.

Ответ: 7, 5.

7). Илья и Семён решают задачи. За час Илья может решить на 2 задачи больше, чем Семён (при этом, оба за час решают целое количество задач). Вместе они решают 33 задачи на 1 ч 15 мин быстрее, чем это сделал бы один Илья. За сколько часов Семён может решить 20 задач?

	работа	производительность	время
Илья	33	x	
Семён	20	$x-2$	?
вместе	33	$x + x-2=2x-2$	На 1ч 15мин быстрее Ильи

$$1\text{ч}15\text{ мин}=\frac{75}{60}\text{ч}=\frac{5}{4}\text{ч}$$

$$\frac{33}{x} > \frac{33}{2x-2} \text{ на } \frac{5}{4}\text{ч}$$

$$\frac{33}{x} - \frac{33}{2x-2} = \frac{5}{4}$$

...

$$\frac{132x-132-66x-5x^2+5x}{4x(x-1)}=0$$

...

$$5x^2-71x+132=0$$

...

$$D=2401, x=2, 2, x=12.$$

Условию задачи удовлетворяет только 12

12 задач решает Илья за час

12-2=10(задач)- решает Семён за час

20:10=2(ч)- за такое время Семён решит 20 задач

Ответ: 20

.

Таким образом, идея применения табличного способа при записи условия и первых шагов решения задачи методически привлекательна, она удобна, наглядна, освобождает обучающихся от рутинного оформления, отвлекающего от сути самого рассуждения.

Литература:

Другой тип текстовых задач - задачи на смеси и сплавы.

Задания № 20 базового уровня из открытого банка задач ЕГЭ- 2022 по математике.

1). В сосуд, содержащий 5 литров 12% водного раствора некоторого вещества, добавили 7 литров воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Ответ: 17.

2). Смешали 4 литра 15% водного раствора некоторого вещества с 6 литрами 25% водного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Ответ: 21.

3). Имеется два сплава. Первый содержит 10% никеля, второй – 30%. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 200 кг, содержащий 25% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава меньше массы второго?

Ответ: 100.

4). Первый сплав содержит 10 % меди, второй – 40%. Масса второго больше массы первого на 3 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав,

содержащий 30% меди. Найти массу третьего сплава. Ответ дать в килограммах.

Ответ: 9.

5). Смешав 30% и 60% растворы кислоты, и добавив 10 кг чистой воды, получили 36% раствор. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50% раствора, то получили бы 41 % раствор кислоты. Сколько килограммов 30% раствора использовали для получения смеси?

Ответ: 60.

6). Имеется два сосуда. Первый содержит 30 кг, а второй – 20 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 68% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 70 % кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?

Ответ: 18.

Задания №8 профильного уровня

1). В 5% раствор объемом 6 литров добавили 2 литра воды и 4 литра 9% раствора. Сколько процентов составляет концентрация нового раствора?

Ответ: 5,5.

2). В банке 5 литров 20% раствора соли. Какой объем сухой соли в литрах необходимо засыпать, чтобы концентрация соли стала 84%? Ответ дать с учетом, что при засыпании соли 20% просыпается мимо.

Ответ: 25.

3). Сколько литров 50% раствора надо долить в 5 литров 20 % раствора, чтобы получился 44% раствор?

Ответ: 20.

4). В первой и во второй банках одинакового объема находятся 15% растворы. В третьей – 30% раствор этого же вещества. Если слить вместе все три банки, то концентрация вещества будет 25%. Во сколько раз объем первой банки меньше объема третьей банки?

Ответ: 4.

5). В первом сосуде находится 25% раствор спирта, во втором – 20%. Если их слить вместе и добавить 2 литра чистого спирта, то получится спирт, содержащий - 26%. Если же слить вместе в два раза больший объем 20% раствора с тем же объемом 20% раствора, и добавить 2 литра чистой воды, то концентрация спирта будет такой же, как во втором растворе. Найти объем меньшего сосуда.

Ответ: 4.

