

**МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»
(РУТ (МИИТ))
МОСКОВСКИЙ КОЛЛЕДЖ ТРАНСПОРТА**

Методическая разработка

Тема: Методы решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

Дисциплина Прикладная математика

Курс 2

Специальность: 11.02.06 Техническая эксплуатация
транспортного

Преподаватель Бабарыка Ю.И.

Москва 2022

Методы решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

Введение

В настоящее время численные методы решения дифференциальных уравнений хорошо разработаны. В этом материале объясняются основные идеи их построения на примере наиболее простых методов. Их изучение составляет первую часть работы.

Применение любого численного метода, вообще говоря, всегда позволяет найти решение дифференциального уравнения лишь приближенно. Причем, величины погрешностей точно заранее не известны, и многие численные методы не дают способов их оценки. Поэтому очень важно знать источники этих ошибок, возникающих при численном интегрировании дифференциальных уравнений, уметь прогнозировать "качество" численного метода в конкретной ситуации.

Основные понятия.

Многие физические законы, которым подчиняются те или иные явления, записываются в виде математического уравнения, выражающего определенную зависимость между какими-то величинами. Часто речь идет о соотношении между величинами, изменяющимися с течением времени, например экономичность двигателя, измеряемая расстоянием, которое автомашина может проехать на одном литре горючего, зависит от скорости движения автомашины. Соответствующее уравнение содержит одну или несколько функций и их производных и называется дифференциальным уравнением. (Темп изменения расстояния со временем определяется скоростью; следовательно, скорость - производная от расстояния; аналогично, ускорение - производная от скорости, так как ускорение задает темп изменения скорости со временем.) Большое значение, которое имеют дифференциальные уравнения для математики и особенно для ее приложений, объясняется тем, что к решению таких уравнений сводится исследование многих физических и технических задач. Дифференциальные уравнения играют существенную роль и в других науках, таких, как биология, экономика и электротехника; в действительности, они возникают везде, где есть необходимость количественного (числового) описания явлений (коль скоро окружающий мир изменяется во времени, а условия изменяются от одного места к другому).

Определение. Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этих функций. Если независимая переменная одна, то уравнение называется обыкновенным; если же независимых переменных две или больше, то уравнение называется уравнением в частных производных.

Наивысший порядок производной, входящей в уравнение, называется порядком дифференциального уравнения.

Например,

$x + yu' = 0$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка.

$\frac{d^2 y}{dx^2} - 4xy \frac{dy}{dx} = x^2$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка.

$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ - дифференциальное уравнение в частных производных.

Определение. Решением дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция, которая при подстановке в уравнение вместо неизвестной функции обращает его в тождество.

График решения дифференциального уравнения 1-го порядка называется *интегральной кривой* этого уравнения. Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется *интегрированием* этого уравнения.

Определение. Общим решением дифференциального уравнения называется такое его решение, содержащее произвольные постоянные, из которого любое решение может быть получено при соответствующем подборе произвольных постоянных.

Определение. Всякое решение дифференциального уравнения, полученное из общего решения при конкретном значении константы, называется **частным решением дифференциального уравнения**.

Определение. Задача, в которой требуется найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию, называется **задачей Коши**.

Общему решению на плоскости соответствует семейство интегральных кривых, зависящее от одного параметра – произвольной постоянной C , а частному решению, удовлетворяющему начальному условию $y(x_0) = y_0$ – кривая этого семейства, проходящая через точку $(x_0; y_0)$.

Встречаются дифференциальные уравнения, имеющие такие решения, которые не получаются из общего решения ни при каких значениях C . Такие решения называются **особыми**.

Определение. Решение дифференциального уравнения, полученное в **неявном виде** $F(x, y) = 0$, называется **интегралом дифференциального уравнения**.

1. Дифференциальные уравнения первого порядка.

1.1 Простейшие дифференциальные уравнения 1-го порядка.

Отличительной чертой простейших дифференциальных уравнений является отсутствие в уравнении неизвестной функции. Такие уравнения либо уже разрешены относительно производной, т.е. имеют вид $y' = f(x)$ или $\frac{dy}{dx} = f(x)$, либо их можно разрешить относительно производной, т.е. $f(x) \cdot y' = g(x)$.

Простейшее дифференциальное уравнение $f(x) \cdot y' = g(x)$ можно разрешить относительно производной, разделив обе части равенства на $f(x)$. Такое преобразование будет эквивалентным, если $f(x)$ не обращается в ноль ни при каких x из интервала интегрирования дифференциального уравнения.

Возможны случаи, когда при некоторых значениях аргумента $x \in X$ функции $f(x)$ и $g(x)$ одновременно обращаются в ноль. Для таких значений x общим решением дифференциального уравнения $f(x) \cdot y' = g(x)$ является любая функция y , определенная в них, так как $0 \cdot y' = 0$.

Если для некоторых значений аргумента $x \in X$ выполняются условия
$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

то в этом случае уравнение решений не имеет.

Для остальных x из интервала X общее решение дифференциального уравнения определяется из преобразованного уравнения $y' = \frac{g(x)}{f(x)}$.

Общее решение простейших дифференциальных уравнений можно отыскать, проинтегрировав обе части этого уравнения. Получим:

$$\int y' dx = \int f(x) dx$$

$$\int \frac{dy}{dx} dx = \int f(x) dx$$

$$\int dy = \int f(x) dx$$

$$y = \int f(x) dx = F(x) + C$$

Итак, $y = F(x) + C$ – искомое общее решение, где $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$, а C – произвольная постоянная.

Если требуется найти **частное решение** простейшего дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, то после нахождения общего решения $y = F(x) + C$, еще нужно вычислить значение постоянной $C = C_0$, используя начальное условие. То есть, константа $C = C_0$ определяется из уравнения $F(x_0) + C = y_0$, и искомое частное решение дифференциального уравнения будет иметь вид $y = F(x) + C_0$.

Примеры.

a) Найдите общее решение дифференциального уравнения $y' = \frac{3}{2x-5}$.

Решение.

Проинтегрируем заданное уравнение. Полученный интеграл возьмем, приведя его к табличному, воспользовавшись свойствами интеграла и дифференциала:

$$y = \int \frac{3}{2x-5} dx = 3 \cdot \frac{1}{2} \int \frac{d(2x-5)}{2x-5} = \frac{3}{2} \ln|2x-5| + C.$$

Таким образом, $y = \frac{3}{2} \ln|2x-5| + C$ - общее решение данного уравнения.

b) Найдите общее решение дифференциального уравнения $y' = x \cdot e^{2x+3}$, проверьте правильность результата. Найдите частное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y\left(-\frac{3}{2}\right) = 1$.

Решение.

1. Проинтегрируем заданное уравнение. Полученный интеграл возьмем по частям:

$$y = \int x \cdot e^{2x+3} dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = e^{2x+3} dx, \quad v = \int e^{2x+3} dx = \frac{1}{2} e^{2x+3} \end{array} \right| = \frac{1}{2} x \cdot e^{2x+3} - \frac{1}{2} \int e^{2x+3} dx =$$

$$= \frac{1}{2} x \cdot e^{2x+3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{2x+3} + C = \frac{1}{2} e^{2x+3} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) + C.$$

Таким образом, $y = \frac{1}{2} e^{2x+3} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) + C$ - общее решение дифференциального уравнения.

2. Чтобы убедиться в правильности результата, проведем проверку. Для этого подставим полученное решение в исходное уравнение:

$$y' = \left(\frac{1}{2} e^{2x+3} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) + C \right)' = \left(\frac{1}{2} e^{2x+3} \right)' \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} e^{2x+3} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)' + C' =$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x+3} \cdot (2x+3)' \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} e^{2x+3} \cdot 1 + 0 = \frac{1}{2} e^{2x+3} \cdot 2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} e^{2x+3} =$$

$$= e^{2x+3} \cdot x - \frac{1}{2} e^{2x+3} + \frac{1}{2} e^{2x+3} = x \cdot e^{2x+3}.$$

Следовательно, при $y = \frac{1}{2} e^{2x+3} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) + C$ исходное уравнение обращается в тождество $y' = x \cdot e^{2x+3} \Leftrightarrow x \cdot e^{2x+3} \equiv x \cdot e^{2x+3}$, поэтому общее решение дифференциального уравнения найдено правильно.

3. Найдём частное решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию. Иными словами, нужно найти значение константы C . Для этого подставим в найденное общее решение начальное условие:

$$\frac{1}{2} e^{2\left(-\frac{3}{2}\right)+3} \cdot \left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) + C = 1$$

$$\frac{1}{2} e^0 \cdot (-2) + C = 1$$

$$-1 + C = 1 \Rightarrow C = 2$$

Следовательно, подставив $C = 2$ в общее решение уравнения, получим частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию:

$$y = \frac{1}{2} e^{2x+3} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) + 2.$$

с) Найдите общее решение простейшего дифференциального уравнения $(x+3) \cdot y' = \ln(x+3)$.

Решение.

1. Известно, что логарифмическая функция определена для положительных значений аргумента, поэтому областью определения выражения $\ln(x+3)$ является интервал $x > -3$. Следовательно, исходное дифференциальное уравнение имеет смысл для $x > -3$. При этих значениях аргумента выражение $x+3$ не обращается в ноль, поэтому можно преобразовать уравнение, разделив обе его части на $x+3$. Получаем:

$$y' = \frac{\ln(x+3)}{x+3}.$$

2. Проинтегрируем полученное дифференциальное уравнение, разрешенное относительно производной и вычислим интеграл, воспользуемся методом подведения под знак дифференциала:

$$y = \int \frac{\ln(x+3)}{x+3} dx = \int \ln(x+3) d(\ln(x+3)) = \frac{\ln^2(x+3)}{2} + C$$

Т.о., $y = \frac{\ln^2(x+3)}{2} + C$ - общее решение дифференциального уравнения при $x > -3$.

1.2 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

Среди обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка существуют такие, в которых переменные x и y находятся по разные стороны знака равенства или их можно разнести по разные стороны знака равенства посредством преобразований. Такие уравнения называются уравнениями с разделяющимися переменными. Кроме того, некоторые дифференциальные уравнения сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными после введения новых переменных.

Уравнения с разделяющимися переменными имеют вид:

$$f_1(y) \cdot g_1(x) dy = f_2(y) \cdot g_2(x) dx \quad \Leftrightarrow \quad f_1(y) \cdot g_1(x) y' = f_2(y) \cdot g_2(x).$$

$$f(y) dy = g(x) dx - \text{уравнение с разделенными переменными.}$$

Общее решение дифференциальных уравнений с разделенными переменными можно найти, проинтегрировав обе части равенства:

$$\int f(y) dy = \int g(x) dx.$$

В дифференциальных уравнениях

$$f_1(y) \cdot g_1(x) dy = f_2(y) \cdot g_2(x) dx \quad \Leftrightarrow \quad f_1(y) \cdot g_1(x) y' = f_2(y) \cdot g_2(x) \quad \text{переменные}$$

могут быть разделены, делением обеих частей уравнения на $f_2(y) \cdot g_1(x)$.

Соответствующее уравнение с разделенными переменными запишется как

$$\frac{f_1(y)}{f_2(y)} dy = \frac{g_2(x)}{g_1(x)} dx$$

При разделении переменных следует быть очень внимательными, чтобы проводимые преобразования были эквивалентными (чтобы $f_2(y)$ и $g_1(x)$ не обращались в ноль на интервале интегрирования). В противном случае можно потерять некоторые решения.

$$\text{И далее } \int \frac{f_1(y)}{f_2(y)} dy = \int \frac{g_2(x)}{g_1(x)} dx.$$

Если интегралы равенств выражаются в элементарных функциях, то можно получить общее решение дифференциального уравнения как неявно заданную функцию $\Phi(x, y)=0$, а иногда получается выразить функцию y в явном виде.

Примеры.

a) Найдите общее решение дифференциального уравнения с разделенными переменными $y^{\frac{2}{3}} dy = \sin x dx$

Решение.

Проинтегрируем обе части равенства: $\int y^{\frac{2}{3}} dy = \int \sin x dx$. По сути, мы уже получили общее решение исходного дифференциального уравнения, так как свели задачу решения дифференциального уравнения к уже известной задаче нахождения неопределенных интегралов. Однако, эти неопределенные интегралы выражаются в элементарных функциях, и мы можем взять их:

$$\int y^{\frac{2}{3}} dy = \frac{y^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C_1 = \frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}} + C_1;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C_2;$$

$$\int y^{\frac{2}{3}} dy = \int \sin x dx \Leftrightarrow \frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}} + C_1 = -\cos x + C_2$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Функция $\frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}} + C_1 = -\cos x + C_2$, которая является общим решением исходного дифференциального уравнения с разделенными переменными, задана неявно. Ответ можно оставить в таком виде. Но в нашем случае искомую функцию y можно выразить явно через аргумент x :

$$\frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}} + C_1 = -\cos x + C_2 \Rightarrow y = \left(-\frac{5}{3} \cos x + C \right)^{\frac{3}{5}}, \quad \text{где } C = \frac{5}{3}(C_2 - C_1)$$

То есть, функция $y = \left(-\frac{5}{3} \cos x + C \right)^{\frac{3}{5}}$ является общим решением исходного дифференциального уравнения.

b) Решить дифференциальное уравнение $xy' = y$.

Решение.

1. В первую очередь нужно переписать производную немного в другом виде: $y' = \frac{dy}{dx}$.

Переписываем уравнение: $x \cdot \frac{dy}{dx} = y$.

2. На втором этапе **всегда** смотрим, нельзя ли **разделить переменные**? Что значит разделить переменные? Грубо говоря, **в левой части** нам нужно оставить **только «игреки»**, а **в правой части** организовать **только «иксы»**. Разделение переменных выполняется с помощью алгебраических преобразований: вынесение за скобки, перенос слагаемых из части в часть со сменой знака, перенос множителей из части в часть по правилу пропорции и т.п.

Дифференциалы dy и dx – это полноправные множители. В рассматриваемом примере переменные легко разделяются умножением обеих частей уравнения на dx и делением обеих же частей уравнения на x :

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Переменные разделены. В левой части – только «игреки», в правой части – только «иксы». Получили уравнение с разделенными переменными.

3. Следующий этап – **интегрирование дифференциального уравнения**:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

Интегралы нужно взять, тем более в данном случае они табличные:

$$\ln|y| = \ln|x| + C$$

К любой первообразной приписывается константа. Здесь два интеграла, но константу C достаточно записать один раз. Почти всегда её приписывают в правой части.

Строго говоря, после того, как взяты интегралы, дифференциальное уравнение считается решенным. Единственное, у нас «игрек» не выражен через «икс», то есть решение представлено **в неявном** виде. То есть, $\ln|y| = \ln|x| + C$ – это общий интеграл.

Теперь нужно попробовать найти общее решение, то есть попытаться представить функцию в явном виде.

Когда в правой части после интегрирования появляется логарифм, то константу почти всегда целесообразно записать тоже под логарифмом. Это нужно для того, чтобы легче было выразить «игрек».

То есть, **вместо** записи $\ln|y| = \ln|x| + C$ обычно пишут $\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|$.

Здесь $\ln|C|$ – это такая же полноценная константа, как и C .

Используя свойство логарифмов: $\ln a + \ln b = \ln(ab)$, получим $\ln|y| = \ln|Cx|$.

Теперь логарифмы и модули можно убрать с обеих частей $y = Cx$.

Функция представлена в явном виде. Это и есть общее решение.

с) Найти частное решение дифференциального уравнения $y' = -2y$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 2$.

Решение.

1. Сначала находим общее решение. В уравнении нет переменной «икс», но это не должно смущать, главное, в нём есть первая производная.

Переписываем производную в нужном виде:

$$\frac{dy}{dx} = -2y$$

Разделяем переменные: «игреки» – налево, «иксы» – направо

$$\frac{dy}{y} = -2dx$$

$$\frac{dy}{y} = -2dx$$

Интегрируем уравнение:

$$\int \frac{dy}{y} = -2 \int dx$$

$$\ln|y| = -2x + C^*$$

Общий интеграл получен. Обратите внимание на константу. Дело в том, что очень скоро она превратится в другую константу.

Преобразуем общий интеграл в общее решение (выразим «игрек» в явном виде). Вспомним определение логарифма $\ln a = b \Rightarrow a = e^b$. В данном случае:

$$y = e^{-2x+C^*}$$

Константу в показателе степени обычно спускают, используя свойство степеней,

$$y = e^{C^*} \cdot e^{-2x}$$

Если C^* – это константа, то e^{C^*} – тоже некоторая константа, которую обозначим через букву C . Получим:

$$y = Ce^{-2x}.$$

2. Теперь нужно найти частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию $y(0)=2$.

В общее решение вместо «икса» подставляем ноль, а вместо «игрека» двойку:

$$2 = Ce^{-2 \cdot 0}$$

$$2 = Ce^0$$

$$2 = C \cdot 1 \Rightarrow \tilde{N} = 2$$

Частное решение исходного уравнения: $y = 2e^{-2x}$.

Выполним проверку. Возьмем полученное частное решение и найдем производную:

$$y' = (2e^{-2x})' = 2(e^{-2x})' = 2e^{-2x} \cdot (-2x)' = -4e^{-2x}.$$

Подставим $y = 2e^{-2x}$ и $y' = -4e^{-2x}$ в исходное уравнение $y' = -2y$:

$$-4e^{-2x} = -2 \cdot 2e^{-2x}$$

$$-4e^{-2x} = -4e^{-2x}.$$

$$-4e^{-2x} = -2 \cdot 2e^{-2x}$$

Получено верное равенство, следовательно, частное решение найдено правильно.

1.3 Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение. Уравнение вида $P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0$ называется однородным, если $P(x; y)$ и $Q(x; y)$ – однородные функции одного измерения.

Определение. Функция $f(x; y)$ называется однородной измерения m , если $f(ux; uy) = u^m f(x; y)$.

Как на практике распознать однородное уравнение? Проверка несложная, и сам алгоритм проверки можно сформулировать так:

В исходное уравнение вместо x подставляем λx , вместо y подставляем λy , производную не трогаем.

Если в результате преобразований удастся сократить ВСЕ «лямбды» (т.е. получить исходное уравнение), то данное дифференциальное уравнение является однородным.

Например, рассмотрим дифференциальное уравнение $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$ и определим его тип.

Вместо x подставляем λx , вместо y подставляем λy :

$$\lambda xy' = \lambda y - \lambda x e^{\frac{\lambda y}{\lambda x}}$$

Очевидно, что лямбды сразу сокращаются в показателе степени:

$$\lambda xy' = \lambda y - \lambda x e^{\frac{y}{x}}$$

Теперь в правой части выносим лямбду за скобки:

$$\lambda xy' = \lambda \left(y - x e^{\frac{y}{x}} \right)$$

Обе части уравнения можно сократить на эту самую лямбду:

$$xy' = y - x e^{\frac{y}{x}}$$

В результате **все** лямбды исчезли, и мы получили исходное уравнение.

Вывод: Данное уравнение является однородным.

Как же решить подобные дифференциальные уравнения? Абсолютно все однородные уравнения можно решить с помощью одной-единственной стандартной замены:

Функцию «игрек» необходимо **заменить произведением** некоторой функции t (тоже зависящей от «икс») и «икса»: $y = tx$.

Производная y' при такой замене вычисляется с использованием правила дифференцирования произведения, т.е.:

$$y' = (tx)' = t'x + tx' = t'x + t$$

Примеры.

а) Решить уравнение: $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$.

Решение.

1. Проверим, является ли данное уравнение однородным. Подставим в уравнение вместо x - λx , вместо y подставляем λy .

$$\lambda xy' = \lambda y + \sqrt{(\lambda y)^2 - (\lambda x)^2};$$

$$\lambda xy' = \lambda y + \sqrt{\lambda^2(y^2 - x^2)};$$

$$\lambda xy' = \lambda y + \lambda \sqrt{y^2 - x^2};$$

$$\lambda xy' = \lambda \left(y + \sqrt{y^2 - x^2} \right);$$

$$xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}.$$

Постоянная λ полностью сократилась. Поэтому уравнение является однородным.

2. Делаем замену $y = tx$; $y' = t'x + t$ и подставляем в исходное уравнение:

$$x(t'x + t) = tx + \sqrt{(tx)^2 - x^2}$$

Преобразуем полученное уравнение:

$$x(t'x + t) = tx + \sqrt{(tx)^2 - x^2};$$

$$x(t'x + t) = tx + \sqrt{x^2(t^2 - 1)};$$

$$x(t'x + t) = tx + x\sqrt{t^2 - 1};$$

$$x(t'x + t) = x\left(t + \sqrt{t^2 - 1}\right);$$

$$t'x + t = t + \sqrt{t^2 - 1};$$

$$t'x = \sqrt{t^2 - 1};$$

$$x \frac{dt}{dx} = \sqrt{t^2 - 1}.$$

3.Получили уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные, умножив обе части уравнения на dx и разделим на $x\sqrt{t^2 - 1}$

При $t^2 - 1 \neq 0$ уравнение принимает вид:

$$\frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = \frac{dx}{x}$$

Интегрируем обе части полученного уравнения с разделенными переменными:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = \ln|t + \sqrt{t^2 - 1}|;$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \ln C;$$

$$\ln|t + \sqrt{t^2 - 1}| = \ln|x| + \ln C;$$

$$\ln|t + \sqrt{t^2 - 1}| = \ln|Cx|;$$

$$t + \sqrt{t^2 - 1} = Cx.$$

Сделаем обратную замену $t = \frac{y}{x}$:

$$\frac{y}{x} + \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1} = Cx.$$

Полученная функция, которая задана неявно, является общим интегралом исходного дифференциального уравнения. Попробуем выразить y .

Умножим обе части на x :

$$y + \sqrt{y^2 - x^2} = Cx^2.$$

Выразим корень квадратный:

$$\sqrt{y^2 - x^2} = Cx^2 - y.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$\left(\sqrt{y^2 - x^2}\right)^2 = (Cx^2 - y)^2;$$

$$y^2 - x^2 = (Cx^2)^2 - 2Cx^2y + y^2;$$

$$y^2 - x^2 = C^2x^4 - 2Cx^2y + y^2;$$

$$2Cx^2y = C^2x^4 + x^2$$

Разделим на x^2 :

$$2Cy = C^2 x^2 + 1$$

Получили решение уравнения при $t^2 - 1 \neq 0$

4. Теперь рассмотрим случай $t^2 - 1 = 0$, т.е. $\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1 = 0$

Корни этого уравнения $y = x$ и $y = -x$ являются решениями исходного уравнения и не входят в полученное решение $2Cy = C^2 x^2 + 1$. Поэтому к общему интегралу добавим решения $y = x$ и $y = -x$.

Ответ:

$$2Cy = C^2 x^2 + 1; \quad y = x; \quad y = -x.$$

b) Проверить уравнение $(x + y)y' + y = 0$ на однородность и найти его общий интеграл. Выполнить проверку.

Решение.

1. Проверим, является ли данное уравнение однородным. Подставим в уравнение вместо x - λx , вместо y подставляем λy :

$$(\lambda x + \lambda y)y' + \lambda y = 0;$$

$$\lambda(x + y)y' + \lambda y = 0;$$

$$\lambda((x + y)y' + y) = 0;$$

$$(x + y)y' + y = 0;$$

Все лямбды сократились, и получилось исходное уравнение, значит, данное ДУ является однородным.

2. Проведем замену: $y = tx$ $y' = t'x + t$ и максимально упростим уравнение:

$$(x + tx)(t'x + t) + tx = 0;$$

$$x(1 + t)(t'x + t) + tx = 0;$$

$$(1 + t)(t'x + t) + t = 0;$$

$$(1 + t)t'x + (1 + t)t + t = 0;$$

$$(1 + t)t'x + t + t^2 + t = 0;$$

$$(1 + t)t'x + t^2 + 2t = 0;$$

3. Разделяем переменные, слева собираем «тэ», справа – «иксы»:

$$(1 + t)t'x + t^2 + 2t = 0;$$

$$(1 + t)x \frac{dt}{dx} = -(t^2 + 2t);$$

$$\frac{(1 + t)dt}{(t^2 + 2t)} = -\frac{dx}{x};$$

Интегрируем:

$$\int \frac{(1 + t)dt}{(t^2 + 2t)} = -\int \frac{dx}{x};$$

Воспользуемся приемом подведения под знак дифференциала:

$$\frac{1}{2} \int \frac{d(t^2 + 2t)}{(t^2 + 2t)} = -\int \frac{dx}{x};$$

$$\frac{1}{2} \ln|t^2 + 2t| = -\ln|x| + \ln|C^*|$$

Получили общий интеграл исходного дифференциального уравнения. Максимально упрощаем его. Если есть дроби, то от них лучше избавиться, умножаем каждую часть на 2:

$$\ln|t^2 + 2t| = -2\ln|x| + 2\ln|C^*|$$

Константу $2\ln|C^*|$ лучше переобозначить через $\ln|C|$:

$$\ln|t^2 + 2t| = -2\ln|x| + \ln|C|$$

Собираем в правой части всё под логарифм, затем избавляемся от логарифмов:

$$\ln|t^2 + 2t| = \ln x^{-2} + \ln|C|;$$

$$\ln|t^2 + 2t| = \ln \frac{|C|}{x^2};$$

$$t^2 + 2t = \frac{C}{x^2}.$$

Выполняем обратную замену: $t = \frac{y}{x}$

$$\frac{y^2}{x^2} + 2\frac{y}{x} = \frac{C}{x^2}.$$

Умножаем все слагаемые на x^2 :

$$y^2 + 2xy = C.$$

Ответ: общий интеграл: $y^2 + 2xy = C$, где $C = const$.

Проверка: Дифференцируем общий интеграл:

$$(y^2 + 2xy)' = (C)';$$

$$(y^2)' + 2(xy)' = 0;$$

$$2yy' + 2(y + xy') = 0;$$

$$yy' + y + xy' = 0;$$

$$(x + y)y' + y = 0.$$

Получено исходное дифференциальное уравнение, значит, решение найдено верно.

1.4 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Определение. Дифференциальное уравнение вида $y' + p(x) \cdot y = q(x)$ называется **линейным**. Если $q(x) = 0$ - уравнение называется линейным однородным и является уравнением с разделяющимися переменными, если $q(x) \neq 0$ - уравнение называется линейным неоднородным.

Характерные черты линейного уравнения:

- 1) В линейное уравнение входит первая производная y' .
 - 2) В линейное уравнение входит произведение $y \cdot p(x)$, где y – функция, $p(x)$ – выражение, зависящее только от «икс».
 - 3) В линейное уравнение входит выражение $q(x)$, тоже зависящее только от «икс».
- В частности, $q(x)$ может быть константой.

Примечание: Разумеется, в практических примерах эти три слагаемых не обязаны располагаться именно в таком порядке, их спокойно можно переносить из части со сменой знака.

Некоторые частные модификации линейного уравнения:

- Выражение $q(x)$ может быть некоторой константой k , в этом случае линейное уравнение принимает вид $y' + p(x) \cdot y = k$
- Выражение $p(x)$ тоже может быть некоторой константой k , тогда линейное уравнение принимает вид $y' + k \cdot y = q(x)$.

- Рядом с производной может находиться множитель $r(\delta)$, зависящий только от «икс» $r(x)y' + p(x) \cdot y = q(x)$ – это тоже линейное уравнение.

Способы решения линейных уравнений:

- метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной);
- метод Бернулли (метод замены переменной).

Рассмотрим метод Бернулли. Он заключается в выражении неизвестной функции через произведение двух, неизвестных на первом этапе, функций, зависящих от «икс», т.е.

$$y = uv, \quad \text{где } u = u(x) \text{ и } v = v(x)$$

$$\text{Тогда } y' = u'v + uv'.$$

$$\text{Исходное уравнение принимает вид } u'v + uv' + p(x)uv = q(x).$$

$$\text{Преобразуем немного } u'v + u(v' + p(x)v) = q(x).$$

Поскольку одна из неизвестных функций (например, v) может быть выбрана совершенно произвольно, так как лишь произведение uv должно удовлетворять исходному уравнению, выберем v таким образом, что $v' + p(x)v = 0$.

Решая это уравнение, которое является уравнением с разделяющимися переменными, получаем:

$$v' + p(x)v = 0;$$

$$\frac{dv}{dx} = -p(x)v;$$

$$\frac{dv}{v} = -p(x)dx;$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx;$$

$$\ln v = -\int p(x)dx;$$

$$v = e^{-\int p(x)dx}$$

Далее решаем уравнение $u'v = q(x)$. Это тоже уравнение с разделяющимися переменными.

$$u'e^{-\int p(x)dx} = q(x);$$

$$\frac{du}{dx} = q(x) \cdot e^{\int p(x)dx};$$

$$du = q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx;$$

$$u = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C.$$

Общее решение исходного дифференциального уравнения будет иметь вид:

$$y = uv = e^{-\int p(x)dx} \left(\int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C \right).$$

Примеры.

а) Найти общее решение дифференциального уравнения $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

Решение.

Данное уравнение имеет «классический» вид $y' + p(x) \cdot y = q(x)$ линейного уравнения.

Проведем замену: $y = uv$, $y' = u'v + uv'$. и подставим в исходное уравнение:

$$u'v + uv' + 2xuv = xe^{-x^2}.$$

После подстановки проведем вынесение множителя за скобки:

$$u'v + u(v' + 2xv) = xe^{-x^2}.$$

Составляем систему. Для этого приравняем к нулю то, что находится в скобках:
 $v' + 2xv = 0$, автоматически получая и второе уравнение системы:
 $u'v + u \cdot 0 = xe^{-x^2} \Rightarrow u'v = xe^{-x^2}$.

В результате:

$$\begin{cases} v' + 2xv = 0 \\ u'v = xe^{-x^2} \end{cases}$$

Из первого уравнения найдем функцию v :

$$\frac{dv}{dx} + 2xv = 0;$$

$$\frac{dv}{dx} = -2xv;$$

$$\frac{dv}{v} = -2xdx;$$

$$\int \frac{dv}{v} = -2 \int xdx;$$

$$\ln|v| = -x^2;$$

$$v = e^{-x^2}.$$

Найденную функцию v подставим во второе уравнение системы $u'e^{-x^2} = xe^{-x^2}$.

Теперь находим функцию u .

$$u'e^{-x^2} = xe^{-x^2};$$

$$\frac{du}{dx} = x;$$

$$du = xdx;$$

$$du = xdx;$$

$$\int du = \int xdx;$$

$$u = \frac{x^2}{2} + C.$$

Обе функции найдены. Таким образом, общее решение:

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + C \right) \cdot e^{-x^2}.$$

b) Найти частное решение дифференциального уравнения $y' + \frac{y}{x} - 2e^{x^2} = 0$,

удовлетворяющее начальному условию $y(1)=e$ (такая постановка вопроса также называется *задачей Коши*).

Решение.

Обратите внимание, что уравнение представлено не совсем в стандартной форме. Этого в данном случае можно не делать, но рекомендуется всегда переписывать уравнения в привычном виде $y' + p(x) \cdot y = q(x)$:

$$y' + \frac{y}{x} = 2e^{x^2}$$

Данное дифференциальное уравнение является линейным, проведем замену:
 $y = uv$, $y' = u'v + uv'$.

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = 2e^{x^2};$$

$$u'v + \left(uv' + \frac{v}{x} \right) = 2e^{x^2}$$

Составим и решим систему:

$$\begin{cases} uv' + \frac{v}{x} = 0 \\ u'v = 2e^{x^2} \end{cases}$$

Из первого уравнения найдем v :

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x};$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x};$$

$$\ln|v| = -\ln|x|;$$

$$\ln|v| = \ln|x|^{-1};$$

$$v = \frac{1}{x}.$$

Подставим найденную функцию во второе уравнение системы и найдем функцию u :

$$u' \cdot \frac{1}{x} = 2e^{x^2};$$

$$\frac{du}{dx} \cdot \frac{1}{x} = 2e^{x^2};$$

$$du = 2xe^{x^2} dx;$$

$$u = 2 \int xe^{x^2} dx;$$

Интеграл в правой части возьмем методом подведения функции под знак дифференциала:

$$\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

$$u = e^{x^2} + C$$

Обе функции найдены, таким образом, общее решение:

$$y = uv = (e^{x^2} + C) \cdot \frac{1}{x}$$

На заключительном этапе нужно решить задачу Коши, то есть найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=e$. В данном случае:

$$y(1) = (e^{1^2} + C) \cdot \frac{1}{1};$$

$$e = e + C \Rightarrow C = 0$$

$$\text{Частное решение } y = \frac{e^{x^2}}{x}.$$

2. Дифференциальные уравнения второго порядка.

2.1 Простейшие дифференциальные уравнения 2-го порядка.

Определение. Уравнение вида $y'' = f(x)$ называется простейшим дифференциальным уравнением второго порядка.

В левой части уравнения – производная второго порядка, в правой – выражение, зависящая только от «икс», в простейшем случае $f(x)$ может быть константой. Характерной особенностью является отсутствие неизвестной функции и первой производной.

Данное дифференциальное уравнение решается последовательным интегрированием правой части:

$$y'' = f(x);$$

$$y' = \int f(x)dx + C_1;$$

$$y = \int \left(\int f(x)dx \right) dx + C_1x + C_2, \text{ где } C_1 \text{ и } C_2 - \text{ произвольные константы.}$$

Множество решений дифференциального уравнения второго порядка определяется двумя постоянными. Чтобы найти частное решение, достаточно задать значение функции и ее производной при фиксированном значении аргумента. Задача нахождения решения дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющего условиям

$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \text{где } x_0, y_0, y'_0 - \text{ заданные числа, также называется задачей Коши. Геометрический смысл задачи Коши состоит в нахождении интегральной кривой, проходящей через заданную точку и имеющей заданный угловой касательной, проведенной к кривой в этой точке.}$

Примеры.

a) Решить уравнение $y'' = x + \sin x$.

Решение.

Интегрируя обе части уравнения первый раз, получаем:

$$y' = \int (x + \sin x) dx;$$

$$y' = \frac{x^2}{2} - \cos x + C_1;$$

Общее решение данного уравнения получаем, интегрируя второй раз:

$$y = \int \left(\frac{x^2}{2} - \cos x + C_1 \right) dx;$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - \sin x + C_1x + C_2 = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1x + C_2.$$

b) Решить уравнение $y'' + \sin 2x = \sqrt{x}$.

Решение.

Преобразуем уравнение $y'' = \sqrt{x} - \sin 2x$.

Уравнение приобрело вид $y'' = f(x)$.

Дважды интегрируем правую часть:

$$y' = \int (\sqrt{x} - \sin 2x) dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx - \frac{1}{2} \int \sin 2x d(2x) = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \cos 2x + C_1;$$

$$y = \int \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \cos 2x + C_1 \right) dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2x + C_1x + C_2;$$

$$y = \frac{4}{15} x^2 \sqrt{x} + \frac{1}{4} \sin 2x + C_1x + C_2.$$

Получили общее решение данного дифференциального уравнения.

с) Решить задачу Коши $y'' = e^{3x} + 2x$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Решение.

1. Найдем общее решение данного дифференциального уравнения, дважды проинтегрировав правую часть уравнения:

$$y' = \int (e^{3x} + 2x) dx = \frac{1}{3}e^{3x} + x^2 + C_1;$$

$$y = \int \left(\frac{1}{3}e^{3x} + x^2 + C_1 \right) dx = \frac{1}{9}e^{3x} + \frac{x^3}{3} + C_1x + C_2$$

2. Для нахождения константы C_1 подставим данные в выражение для производной первого порядка:

$$y' = \frac{1}{3}e^{3x} + x^2 + C_1;$$

$$0 = \frac{1}{3}e^{3 \cdot 0} + 0^2 + C_1;$$

$$0 = \frac{1}{3} \cdot 1 + C_1;$$

$$C_1 = -\frac{1}{3}.$$

3. Для нахождения константы C_2 подставим данные и найденную константу C_1 в общее решение дифференциального уравнения:

$$0 = \frac{1}{9}e^{3 \cdot 0} + \frac{0^3}{3} - \frac{1}{3} \cdot 0 + C_2;$$

$$0 = \frac{1}{9} \cdot 1 + C_2;$$

$$C_2 = -\frac{1}{9}.$$

Частное решение данного дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям, будет иметь вид:

$$y = \frac{1}{9}e^{3x} + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}$$

2.2 Дифференциальные уравнения 2-го порядка, допускающие понижение порядка.

Простейшее уравнение данного типа в общем виде выглядит так: $F(x, y', y'')$ – всё есть, а «игрека» нет. Точнее, его нет *в явном виде*. Кроме того, во всех этих уравнениях **обязательно** присутствует независимая переменная «икс».

Подобные уравнения решаются с помощью замены: $y' = z$.

Примеры.

а) Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения $y'' = -\frac{1}{x}y'$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$.

Решение.

1. Найдем общее решение уравнения. В данном уравнении второго порядка в явном виде не участвует переменная y . Заменим первую производную y' новой функцией, которая зависит от «икс». Если $y' = z$, то $y'' = z'$.

$$z' = -\frac{1}{x} z$$

Полученное дифференциальное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Разделяем переменные:

$$\frac{dz}{z} = -\frac{1}{x} z;$$

$$\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x};$$

$$\ln|z| = -\ln|x| + C_1;$$

$$z = \frac{C_1}{x}.$$

Сделаем обратную замену:

$$y' = \frac{C_1}{x}; \quad (*)$$

$$y = C_1 \int \frac{dx}{x};$$

$$y = C_1 \ln|x| + C_2. \quad (**)$$

2. Для нахождения частного решения, удовлетворяющего заданным начальным условиям, подставим в (*) и в (**) независимую переменную, значение функции и значение производной:

$$1 = \frac{C_1}{1} \Rightarrow \tilde{N}_1 = 1$$

$$2 = 1 \cdot \ln 1 + C_2 \Rightarrow \tilde{N}_2 = 2$$

Частное решение имеет вид:

$$y = \ln|x| + 2.$$

b) Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + \frac{y'}{x+1} = 9(x+1)$.

Решение.

В данном уравнении второго порядка в явном виде не участвует переменная y . Заменим первую производную y' новой функцией, которая зависит от «икс». Если $y' = z$, то $y'' = z'$.

Цель проведенной замены очевидна – понизить степень уравнения. Получаем:

$$z' + \frac{z}{x+1} = 9(x+1).$$

Получено линейное неоднородное уравнение первого порядка, с той лишь разницей, что вместо привычной функции «игрек» у нас функция «зет». Грубо говоря, отличие только в букве.

Линейное неоднородное уравнение первого порядка можно решить методом Бернулли (замены переменной) (Подробнее см. выше).

$$z = uv, \quad \frac{dz}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$\text{Тогда } z' = u'v + uv'.$$

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x+1} = 9(x+1);$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x+1}\right) = 9(x+1).$$

$$\begin{cases} v' + \frac{v}{x+1} = 0 \\ u'v = 9(x+1) \end{cases}$$

$$v' + \frac{v}{x+1} = 0;$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x+1};$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x+1};$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x+1};$$

$$\ln|v| = -\ln|x+1| \Rightarrow v = \frac{1}{x+1}$$

$$u' \cdot \frac{1}{x+1} = 9(x+1);$$

$$u' = 9(x+1)^2;$$

$$u = 9 \int (x+1)^2 dx;$$

$$u = 9 \cdot \frac{(x+1)^3}{3} + C_1 = 3(x+1)^3 + C_1$$

$$z = \frac{1}{x+1} (3(x+1)^3 + C_1) = 3(x+1)^2 + \frac{C_1}{x+1}.$$

Проводим обратную замену:

$$y' = 3(x+1)^2 + \frac{C_1}{x+1};$$

$$y = \int \left(3(x+1)^2 + \frac{C_1}{x+1} \right) dx$$

$$y = 3 \cdot \frac{(x+1)^3}{3} + C_1 \ln|x+1| + C_2 = (x+1)^3 + C_1 \ln|x+1| + C_2.$$

Выполним проверку найденного решения. Берём полученный ответ, находим первую и вторую производные:

$$y' = \left((x+1)^3 + C_1 \ln|x+1| + C_2 \right)' = 3(x+1)^2 + \frac{C_1}{x+1};$$

$$y'' = \left(3(x+1)^2 + \frac{C_1}{x+1} \right)' = 6(x+1) - \frac{C_1}{(x+1)^2}.$$

Подставим первую и вторую производную в исходное уравнение $y'' + \frac{y'}{x+1} = 9(x+1)$

:

$$6(x+1) - \frac{C_1}{(x+1)^2} + \frac{3(x+1)^2 + \frac{C_1}{x+1}}{x+1} = 9(x+1);$$

$$6(x+1) - \frac{C_1}{(x+1)^2} + 3(x+1) + \frac{C_1}{(x+1)^2} = 9(x+1);$$

$$6(x+1) + 3(x+1) = 9(x+1);$$

$$9(x+1) = 9(x+1);$$

Получено верное равенство, значит, общее решение найдено правильно.

Ответ: $y = (x+1)^3 + C_1 \ln|x+1| + C_2.$

2.3 Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Рассматриваемые уравнения имеют вид:

$$y'' + py' + qy = 0, \text{ где } p \text{ и } q - \text{некоторые действительные числа.}$$

Для того чтобы решить данное дифференциальное уравнение, нужно составить так называемое *характеристическое уравнение*:

$$k^2 + pk + q = 0,$$

По какому принципу составлено характеристическое уравнение, отчётливо видно:

вместо второй производной записываем k^2 ;

вместо первой производной записываем k

вместо функции y ничего не записываем.

$$k^2 + pk + q = 0, - \text{это } \textbf{обычное квадратное уравнение}, \text{ которое предстоит решить.}$$

В зависимости от корней этого уравнения исходное дифференциальное уравнение имеет разные виды общих решений.

Если характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = 0$, имеет два **различных** действительных корня $k_1 \neq k_2$, (т.е., если дискриминант $D > 0$), то общее решение однородного уравнения выглядит так:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}, \quad \tilde{N}_1, \tilde{N}_2 - \text{неизвестные функции.}$$

Если характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = 0$, имеет два **совпадающих** действительных корня $k_1 = k_2 = k$, (т.е., если дискриминант $D = 0$), то общее решение однородного уравнения выглядит так:

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{kx}, \quad \tilde{N}_1, \tilde{N}_2 - \text{неизвестные функции.}$$

Если характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = 0$, имеет два **сопряженные комплексные** корни $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$ (т.е., если дискриминант $D < 0$), то общее решение однородного уравнения выглядит так:

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 i \sin \beta x), \quad \tilde{N}_1, \tilde{N}_2 - \text{неизвестные функции.}$$

Если получаются *чисто мнимые* сопряженные комплексные корни: $k_{1,2} = \pm \beta i$, то общее решение упрощается:

$$y = e^{0 \cdot x} (C_1 \cos \beta x + C_2 i \sin \beta x) = C_1 \cos \beta x + C_2 i \sin \beta x.$$

Примеры.

а) Решить дифференциальное уравнение $y'' + y' - 2y = 0$.

Решение.

Составим и решим характеристическое уравнение

$$k^2 + k - 2 = 0$$

$$D = 1 + 8 = 9 > 0$$

Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня

$$k_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$$

$$k_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$$

Общее решение имеет вид $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$.

Выполним проверку. Берем ответ и находим производную:

$$y' = (C_1 e^{-2x} + C_2 e^x)' = -2C_1 e^{-2x} + C_2 e^x.$$

Находим вторую производную:

$$y'' = (-2C_1 e^{-2x} + C_2 e^x)' = 4C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$$

Подставляем найденные значения производных в левую часть исходного уравнения:

$$y'' + y' - 2y = 0$$

$$4C_1y^{-2x} + C_2e^x + (-2C_1e^{-2x} + C_2e^x) - 2(C_1e^{-2x} + C_2e^x) = 0$$

$$\underline{4C_1y^{-2x} + C_2e^x - 2C_1e^{-2x} + C_2e^x - 2C_1e^{-2x} - 2C_2e^x} = 0$$

$$0 = 0$$

Получено тождество, значит, общее решение $y = C_1e^{-2x} + C_2e^x$. найдено правильно.

b) Решить дифференциальное уравнение $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Решение.

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 6k + 9 = 0$$

$$D = 36 - 36 = 0$$

Здесь можно вычислить дискриминант, получить ноль и найти кратные корни. Но можно применить известную формулу сокращенного умножения:

$$(k - 3)^2 = 0$$

Получены два кратных действительных корня $k_{1,2} = 3$

Общее решение имеет вид: $y = (C_1 + C_2x)e^{3x}$, где C_1, C_2 – константы.

с) Решить однородное дифференциальное уравнение второго порядка $y'' - 2y' + 10y = 0$.

Решение.

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 2k + 10 = 0$$

$$D = 4 - 40 = -36 < 0$$

Характеристическое уравнение имеет сопряженные комплексные корни:

$$k_{1,2} = \frac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i.$$

Общее решение имеет вид:

$$y = e^x (C_1 \cos 3x + C_2 i \sin 3x), \text{ где } C_1, C_2 \text{ – константы.}$$

d) Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 4y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1, y'(0) = 2$.

Решение.

1. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 4 = 0$$

$$(k - 2)(k + 2) = 0$$

$$k_1 = -2, k_2 = 2.$$

Получены два различных действительных корня, поэтому общее решение:

$$y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x}.$$

2. Теперь нужно найти частное решение, соответствующее заданным начальным условиям. Алгоритм нахождения частного решения следующий:

Сначала используем начальное условие $y(0) = 1$:

$$y(0) = C_1e^{-2 \cdot 0} + C_2e^{2 \cdot 0} = C_1 + C_2$$

$$C_1 + C_2 = 1$$

Далее берём наше общее решение $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x}$ и находим производную:

$$y' = (C_1e^{-2x} + C_2e^{2x})' = -2C_1e^{-2x} + 2C_2e^{2x}$$

Используем второе начальное условие $y'(0) = 2$:

$$y'(0) = -2C_1e^{-2 \cdot 0} + 2C_2e^{2 \cdot 0} = -2C_1 + 2C_2$$

$$-2C_1 + 2C_2 = 2$$

Составим и решим систему из двух найденных уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -2C_1 + 2C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_1 + C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 2C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = 1, \quad C_1 = 0$$

Подставляем найденные значения констант в общее решение:

$$y = 0 \cdot e^{-2x} + 1 \cdot e^{2x}$$

$$\underline{y = e^{2x}}.$$

Получено частное решение.

Проверка осуществляется по следующей схеме:

Сначала проверим, выполняется ли начальное условие $y(0) = 1$:

$$y(0) = e^{2 \cdot 0} = 1 \text{ — начальное условие выполнено.}$$

Находим первую производную от ответа:

$$y' = (e^{2x})' = 2e^{2x}$$

$$y'(0) = 2e^{2 \cdot 0} = 2 \text{ — второе начальное условие тоже выполнено.}$$

Находим вторую производную:

$$y'' = (2e^{2x})' = 4e^{2x}$$

Подставим $y = e^{2x}$ и $y'' = 4e^{2x}$ в левую часть исходного дифференциального уравнения $y'' - 4y = 0$:

$$y'' - 4y = 4e^{2x} - 4e^{2x} = 0 \text{ что и требовалось проверить.}$$

Таким образом, частное решение найдено, верно.