

Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение лицей при
ТПУ г. Томска

ОПТИМИЗАЦИЯ ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Автор: Золотарева Вера, 10 класс

Научные руководители: Коновалов Платон Валерьевич, Беленкова
Наталья Павловна

2023

Оглавление:

Введение	1
Цель работы.....	2
Ход работы	2
Выводы	7
Список используемой литературы	7
ПРИЛОЖЕНИЕ №1	8
ПРИЛОЖЕНИЕ №2	9
Графики функции $f(a; x)$ при иррациональном a	9
Графики функции $f(a; x)$ при рациональном a	18

ВВЕДЕНИЕ

В точных науках часто используются приближенные значения иррациональных чисел – констант, коэффициентов в различных формулах. Это неизбежно приводит к погрешности вычислений, что иногда является критичным. Также использовать длинную десятичную запись рациональных констант не всегда бывает удобно, а иногда даже проблематично и затратно. В нашей работе мы придумали метод получения оптимальных рациональных приближений.

При выполнении работы мы познакомились с теорией диофантовых приближений – разделом теории чисел, изучающим приближения вещественных чисел рациональными. Она возникла как ответ на вопрос, насколько точно можно подобрать такое приближение для вещественного числа [1].

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

Получение метода подбора оптимальных рациональных приближений для произвольного вещественного числа.

ЗАДАЧИ:

1. Выбрать критерии оптимальности;
2. Написать программу, которая для заданного вещественного числа подбирает рациональные приближения и оценивает их;
3. Для нескольких иррациональных чисел найти оптимальные приближенные значения, проанализировать результаты.

ХОД РАБОТЫ

Люди задумывались о приближении чисел еще в древности. Так, в III в. до н. э. Архимед предложил использовать в качестве приближенного значения числа π дробь $\frac{22}{7}$ [2]. Покажем на этом примере, что десятичные приближения не всегда являются удачными. Округления числа π будут более точными, чем архимедово приближение, только начиная с третьего знака после запятой – дроби $\frac{3142}{1000}$. Заметим, что знаменатель увеличился примерно в 143 раза, а точность – всего в 3 раза. Поэтому в качестве критериев оптимальности мы решили выбрать “точность” приближений и “размер” знаменателя.

В качестве “точности” мы выбрали величину $\sqrt[4]{\left|\alpha - \frac{p}{x}\right|}$, где α – само число, а $\frac{p}{x}$ – его приближение. Корень 4-ой степени был выбран, так как он достаточно хорошо отражает даже небольшие изменения в окрестности нуля – небольшое изменение подкоренного выражения влечет заметное изменение значения корня. А в качестве “размера” взяли квадратный корень $\sqrt[2]{x}$, поскольку он неограниченно возрастает с ростом самого знаменателя, но возрастает “с замедлением”. Для того чтобы оценить каждое приближение, мы ввели целевую функцию $f(\alpha; x)$, которая учитывает оба параметра. Для удобства мы решили, что “лучшим” приближениям будут

соответствовать меньшие значения этой функции, поэтому мы определили её как произведение “точности” на “размер”, а именно:

$$f(\alpha; x) = \sqrt[4]{\left|\alpha - \frac{p}{x}\right|} \times \sqrt{x}$$

Для создания программы был выбран язык Python из-за несложного синтаксиса и возможности использования большого количества библиотек (такие как plotly, pandas и math для Python), которые предоставили значения некоторых иррациональных чисел, а также позволили построить нужные графики (см. Приложение №2). Была написана программа, которую можно использовать для нахождения оптимального рационального приближения любого вещественного числа. Код программы на примере числа π можно увидеть в Приложении №1.

С помощью этой программы мы исследовали иррациональные числа разной природы – выраженные в радикалах, тригонометрические константы, которые в радикалах не выражаются [3], $\ln 2$, e , и π . В итоге программа выдала следующие результаты:

Таблица 1. Результаты вычислений программы для некоторых иррациональных чисел.

α – иррациональное число	$\frac{p}{x}$ – результат программы	$\left \alpha - \frac{p}{x}\right $ - отклонение
π (число пи)	$\frac{355}{113}$	$2,66764 \times 10^{-7}$
e (число Эйлера)	$\frac{193}{71}$	$2,80307 \times 10^{-5}$
	$\frac{2\,721}{1\,001}$	$1,10177 \times 10^{-7}$
$\ln 2$	$\frac{25\,469}{36\,744}$	$6,78921 \times 10^{-11}$

$\sqrt{2}$	$\frac{3}{2}$	0,08579
$\sqrt{3}$	$\frac{2}{1}$	0,26795
$\frac{2 + \sqrt{11}}{3}$	$\frac{2}{1}$	0,22779
Φ (золотое сечение)	$\frac{2}{1}$	0,38197
ψ (сверхзолотое сечение)	$\frac{1\ 873}{1\ 278}$	$2,68689 \times 10^{-8}$
ρ (пластическое число)	$\frac{63\ 760}{48\ 131}$	$3,05134 \times 10^{-12}$
$\sqrt[3]{4}$	$\frac{1\ 008}{635}$	$5,22835 \times 10^{-7}$
	$\frac{4\ 813}{3\ 032}$	$3,44077 \times 10^{-9}$
$5 + \sqrt[5]{\frac{467}{383}}$	$\frac{47\ 182}{7\ 811}$	$1,50373 \times 10^{-9}$
ζ (3) (постоянная Апері)	$\frac{6}{5}$	$2,05690 \times 10^{-3}$
	$\frac{1987}{1653}$	$3,68559 \times 10^{-8}$
cos(39°)	$\frac{7}{9}$	$6,31816 \times 10^{-4}$
cos(73°)	$\frac{1\ 054}{3\ 605}$	$1,24120 \times 10^{-9}$

$\sin(73^\circ)$	$\frac{61\,127}{63\,920}$	$1,81043 \times 10^{-11}$
1 рад (радиан)	$\frac{4\,068}{71}$	$4,86520 \times 10^{-6}$
1 пк (парсек)	$\frac{33\,002\,369}{160}$	$4,51968 \times 10^{-6}$
	$\frac{1\,710\,760\,303}{8\,294}$	$1,65892 \times 10^{-9}$

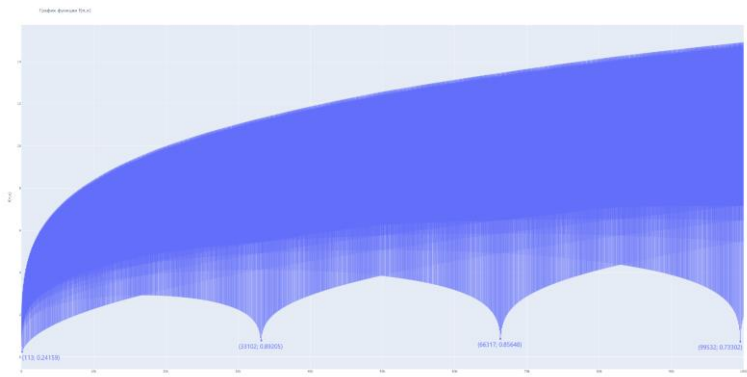


Рисунок 1. График функции $f(a; x)$ для иррациональных чисел на примере $a = \pi$.

При вычислении квадратных иррациональностей возник вопрос с приближением через рациональные. Как известно, золотое сечение тоже является квадратичной иррациональностью и в то же время считается самым плохо приближаемым числом — это объясняется тем, что его представление в виде цепной дроби периодически и состоит только из единиц, то есть члены в этой дроби стабильно малы, а потому приближения сходятся медленно [4]. Также известно, что число раскладывается в бесконечную периодическую цепную дробь тогда и только тогда, когда оно является квадратичной иррациональностью [5]. Исходя из этих

фактов, можно сказать, что квадратичные иррациональности приближаются хуже других чисел.

При рассмотрении рациональных чисел было отмечено, что лучшим приближением является само число, притом функция обращается в 0 (см. Приложение №2). Для иррациональных чисел подобного не наблюдалось, поскольку невозможно подобрать рациональное число так, чтобы $\left| \alpha - \frac{p}{x} \right| = 0$, так как $\alpha \neq \frac{p}{x}$ ни для каких p, x по определению иррационального числа.

Таблица 2. Результаты вычислений программы для некоторых рациональных чисел.

α – рациональное число	$\frac{p}{x}$ – результат программы	$\left \alpha - \frac{p}{x} \right $ – отклонение
$\frac{7}{17}$ = 0,(4117647058823529)	$\frac{7}{17}$	0
$\frac{13\,717\,421}{111\,111\,111}$ = 0,(123456789)	$\frac{10}{81}$	$1,0 \times 10^{-9}$
	$\frac{13\,717\,421}{111\,111\,111}$	0
$\frac{23\,456\,789}{123\,456\,789}$	$\frac{19}{100}$	$7,3710 \times 10^{-9}$
	$\frac{23\,456\,789}{123\,456\,789}$	0

ВЫВОДЫ:

1. Рассмотренная целевая функция $f(\alpha; x)$ удовлетворяет выбранным критериям приближения.
2. Проанализировав результаты, можем утверждать, что наилучший показатель знаменателя x лежит в множестве натуральных чисел от 1 до 100 000, что значительно облегчает работу с этими числами.
3. Также в ходе работы было установлено, что для рациональных и иррациональных чисел графики целевой функции различны.
4. Каждое из найденных приближений удовлетворяет неравенству теоремы Гурвица о том, что для любого иррационального числа α найдется бесконечно много рациональных чисел $\frac{p}{q}$, таких, что $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$ [6].
5. Квадратичные иррациональности хуже приближаются рациональными числами, чем другие иррациональные.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Теория диофантовых приближений. [Электронный ресурс] – режим доступа: ru.wikipedia.org/wiki/Теория_диофантовых_приближений
2. Пи (число). [Электронный ресурс] – режим доступа: [ru.wikipedia.org/wiki/Пи_\(число\)](http://ru.wikipedia.org/wiki/Пи_(число))
3. Конвей Дж. Х., Гай Р. К. Книга чисел. 1996. – с. 196.
4. Golden ratio. [Электронный ресурс] – режим доступа: https://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio
5. Нестеренко Ю. В. Теория чисел: учебник для студ. вышш. учеб. заведений. – М.: Издательский центр "Академия", 2008. – с. 208–209.
6. А.Нивен. Числа рациональные и иррациональные. Издательство "МИР", 1966. – 198 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ №1

```
from math import pi
import plotly.express as px
import pandas
import csv

FF = open("function.csv", mode = "w")
our_writer = csv.writer(FF, delimiter = ";", lineterminator='\n')
our_writer.writerow(["x", "f(x)"])

i = pi                                     # выбор иррационального числа
d1 = 1

def f(i, x, c):                           # определение целевой функции
    return (abs(x*(i*x-c)))*0.25

for x in range(1,1000+1):                 # выбор промежутка для x
    p = 0

    r1 = 100*i
    for j in range(int(i)*x-1, (int(i) + 1)*x+1):
        r2 = abs(i-j/x)
        if r2 < r1:                       # поиск наилучшего числителя
            p = j
            r1 = r2
        else:
            break
    fq = f(i, x, p)                       # вычисление целевой функции
    our_writer.writerow([str(x),str(fq)])
FF.close()

df = pandas.read_csv("function.csv", delimiter=';')
fig = px.line(df, x='x', y='f(x)', labels={'x': 'x', 'f(x)': 'f(π,x)'},
title="График функции f(π,x)", width=3000, height=1500)
fig.write_image("f(π,x).png")            # построение графика
```

Рисунок 2. Код программы на примере числа π

ПРИЛОЖЕНИЕ №2

Графики функции $f(\alpha; x)$ при иррациональном α :

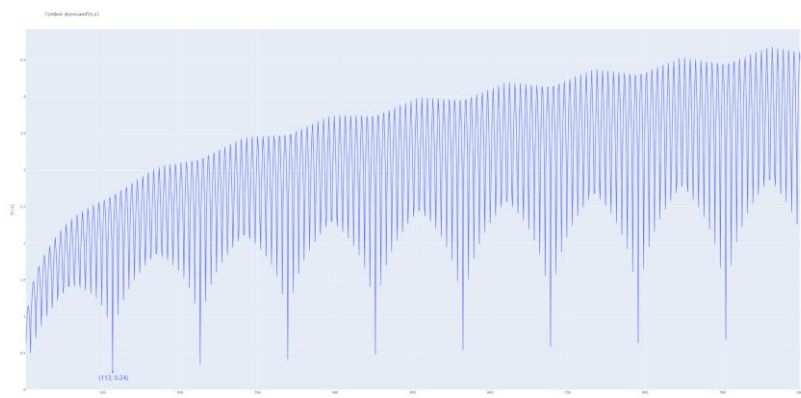


Рисунок 3. График функции $f(\alpha; x)$ для $\alpha = \pi$ на $[1; 10000]$.

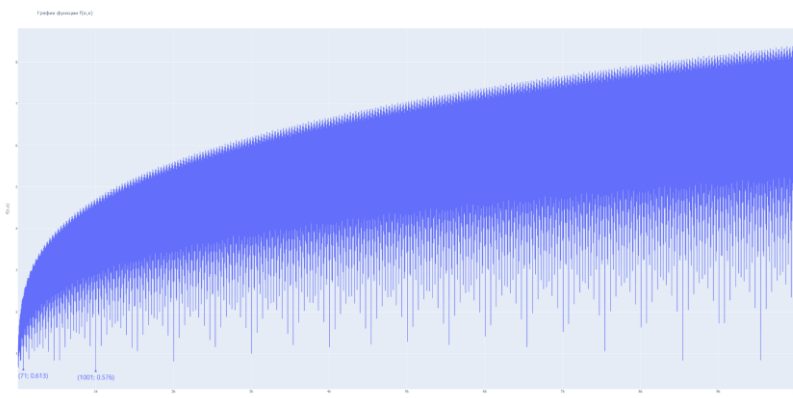


Рисунок 4. График функции $f(\alpha; x)$ для $\alpha = e$ на $[1; 10000]$.

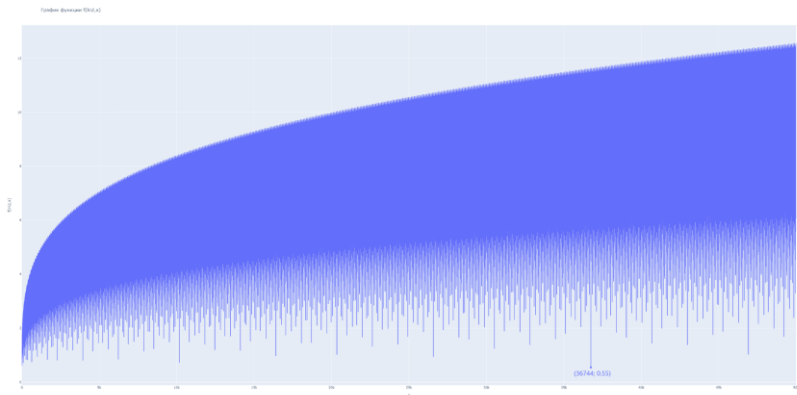


Рисунок 5. График функции $f(a; x)$ для $\alpha = \ln 2$ на $[1; 50000]$.

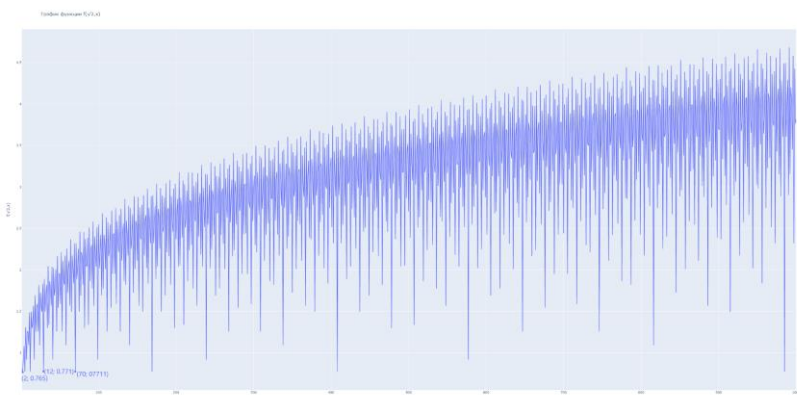


Рисунок 6. График функции $f(a; x)$ для $\alpha = \sqrt{2}$ на $[1; 1000]$.

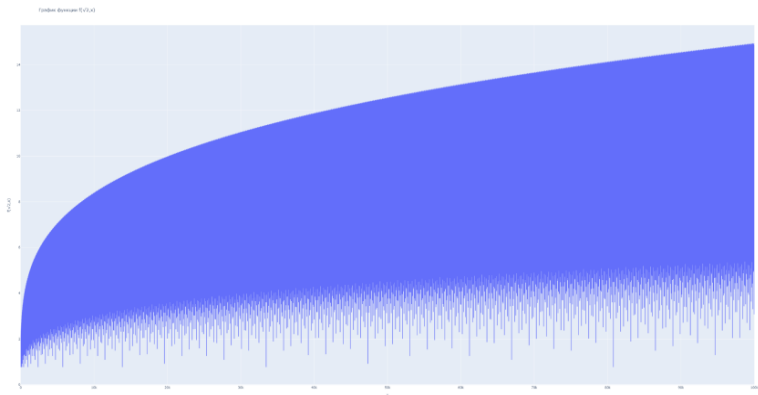


Рисунок 7. График функции $f(a; x)$ для $\alpha = \sqrt{2}$ на $[1; 100000]$.

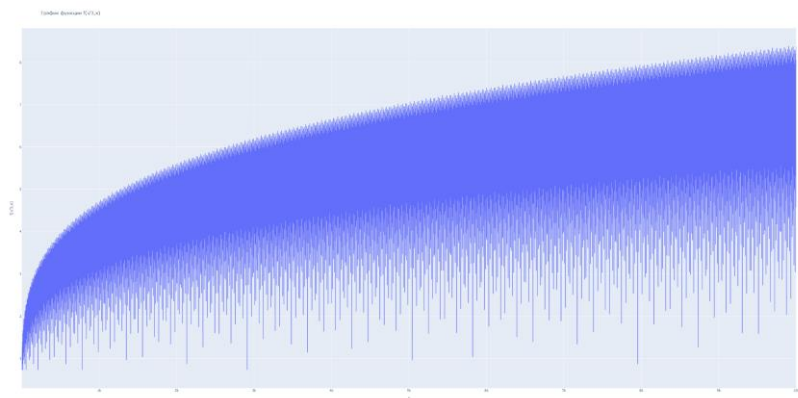


Рисунок 8. График функции $f(a; x)$ для $\alpha = \sqrt{3}$ на $[1; 100000]$.

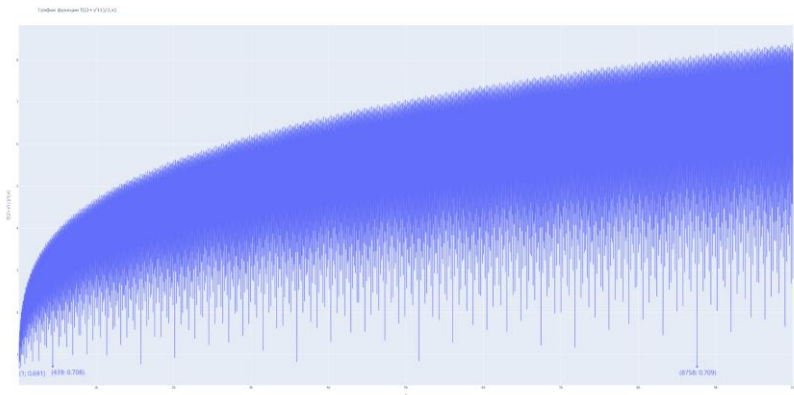


Рисунок 9. График функции $f(a; x)$ для $\alpha = \frac{2+\sqrt{11}}{3}$ на $[1; 10000]$.

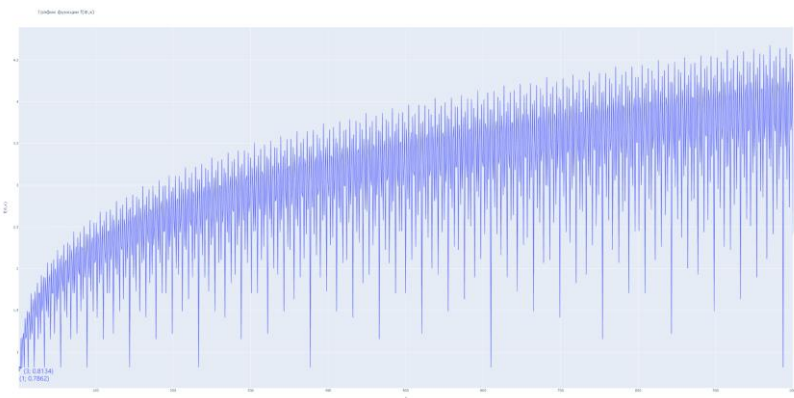


Рисунок 10. График функции $f(a; x)$ для $\alpha = \Phi$ на $[1; 1000]$.

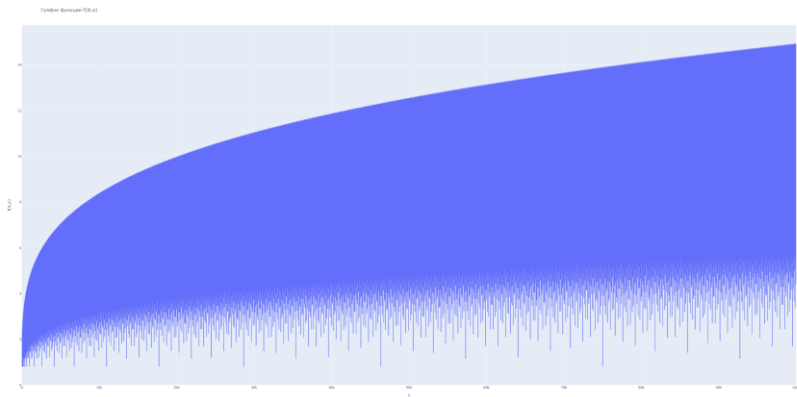


Рисунок 11. График функции $f(\alpha; x)$ для $\alpha = \Phi$ на $[1; 100000]$.

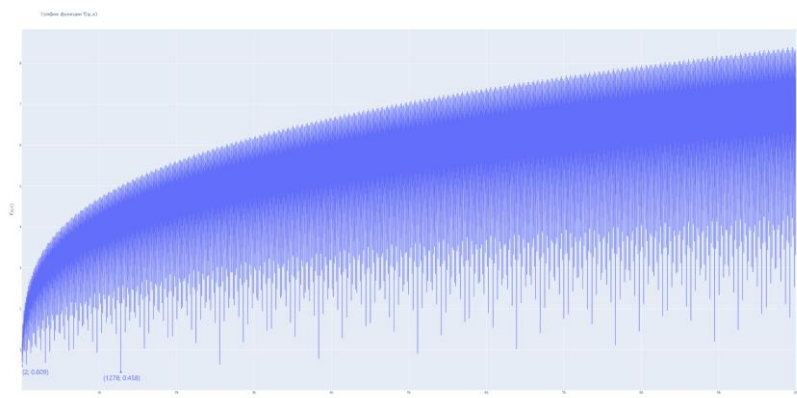


Рисунок 12. График функции $f(\alpha; x)$ для $\alpha = \psi$ на $[1; 100000]$.

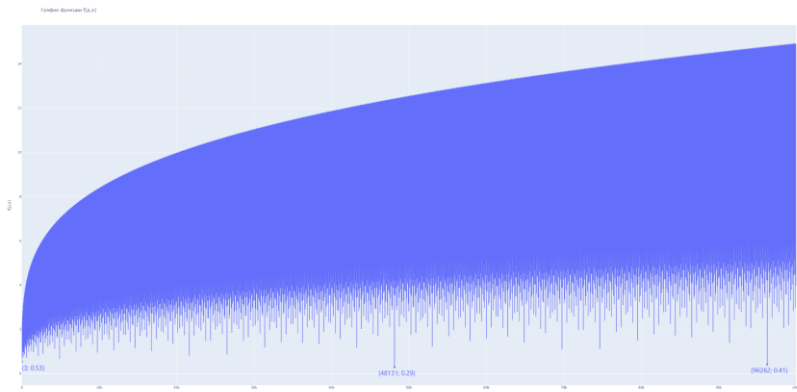


Рисунок 13. График функции $f(\alpha; x)$ для $\alpha = \rho$ на $[1; 100000]$.

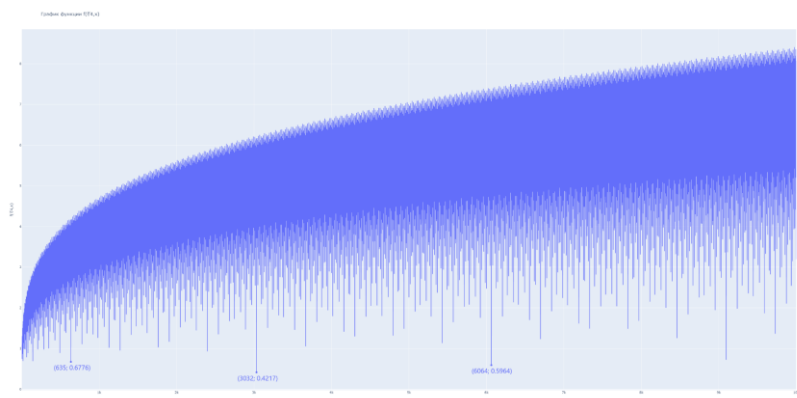


Рисунок 14. График функции $f(\alpha; x)$ для $\alpha = \sqrt[3]{4}$ на $[1; 100000]$.

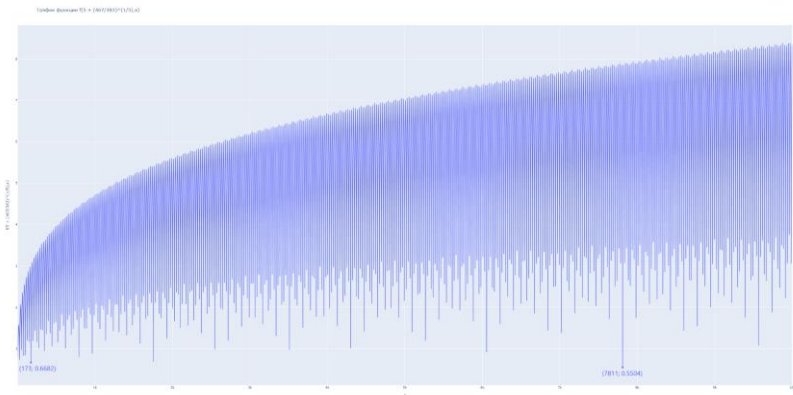


Рисунок 15. График функции $f(\alpha; x)$ для $\alpha = 5 + \sqrt[5]{\frac{467}{383}}$ на $[1; 10000]$.

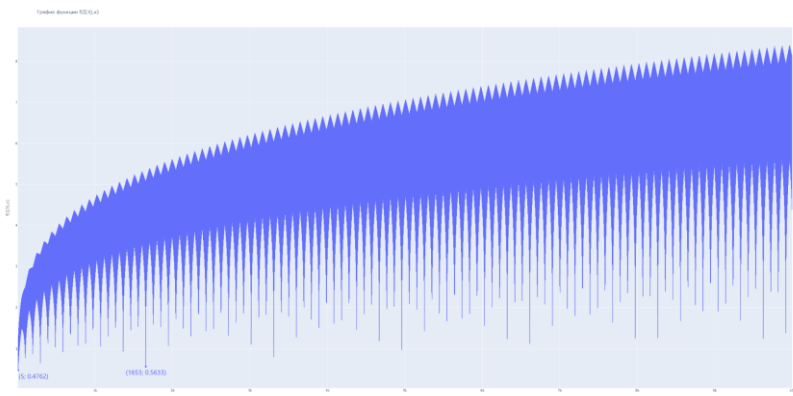


Рисунок 16. График функции $f(\alpha; x)$ для $\alpha = \zeta(3)$ на $[1; 10000]$.

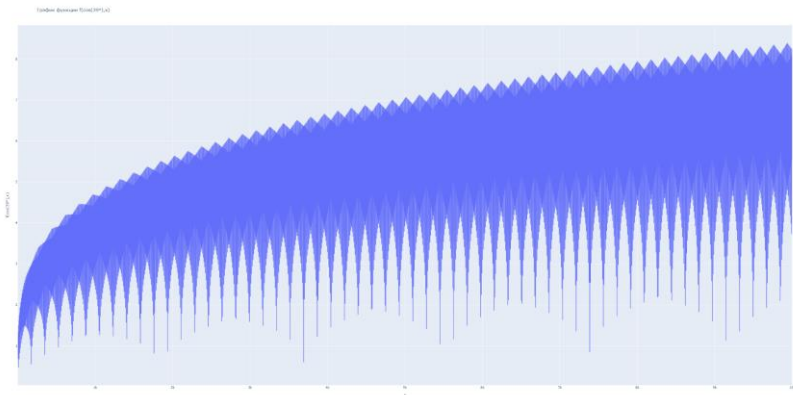


Рисунок 17. График функции $f(\alpha; x)$ для $\alpha = \cos(39^\circ)$ на $[1; 10000]$.

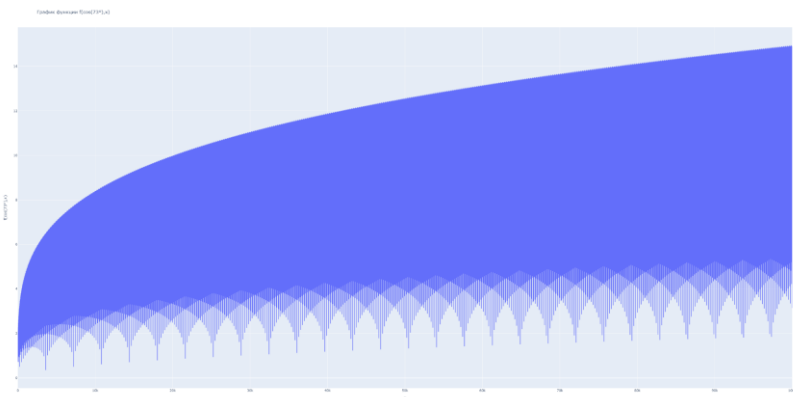


Рисунок 18. График функции $f(\alpha; x)$ для $\alpha = \cos(73^\circ)$ на $[1; 100000]$.

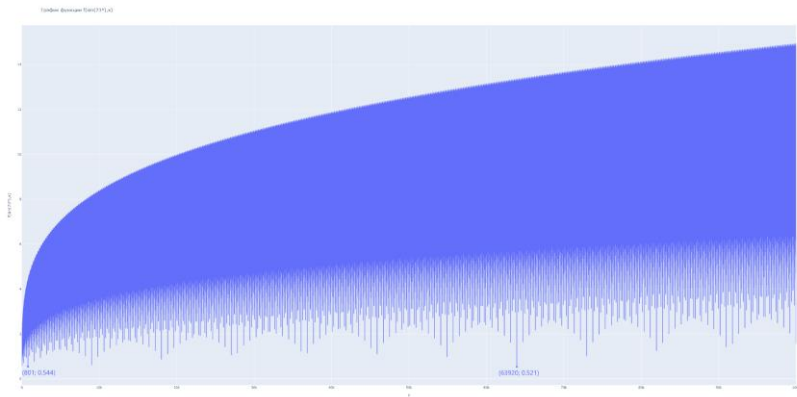


Рисунок 19. График функции $f(\alpha; x)$ для $\alpha = \sin(73^\circ)$ на $[1; 100000]$.

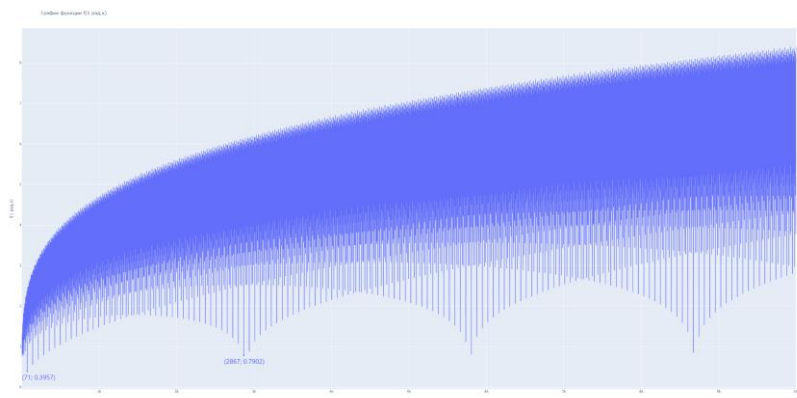


Рисунок 20. График функции $f(\alpha; x)$ для $\alpha = 1$ рад на $[1; 10000]$.

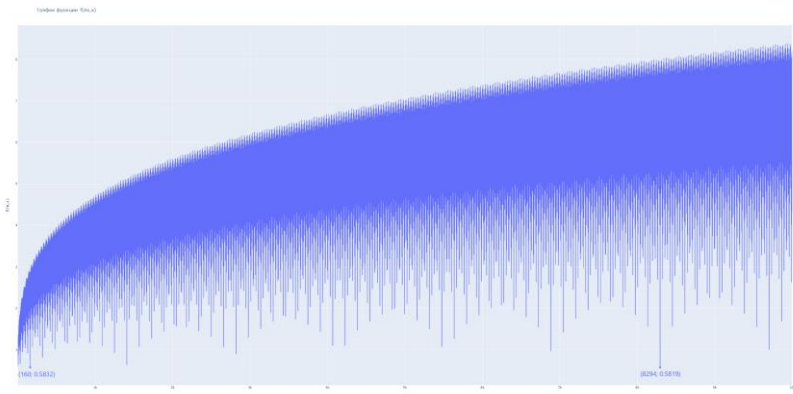


Рисунок 21. График функции $f(\alpha; x)$ для $\alpha = 1$ пк на $[1; 10000]$.

Графики функции $f(\alpha; x)$ при рациональном α :

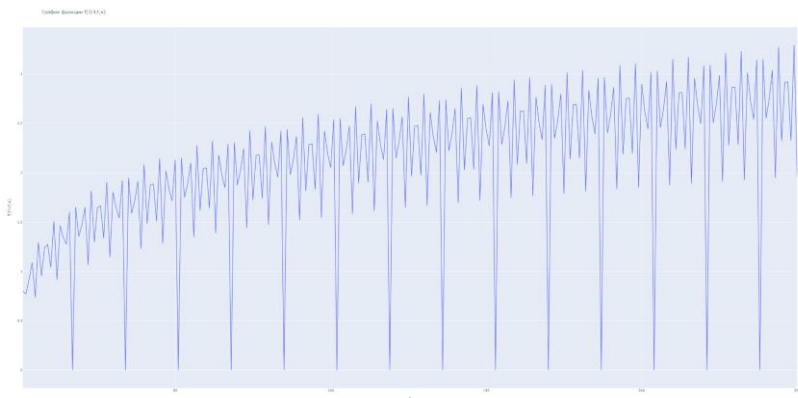


Рисунок 22. График функции $f(\alpha; x)$ для $\alpha = \frac{7}{17}$ на $[1; 250]$.

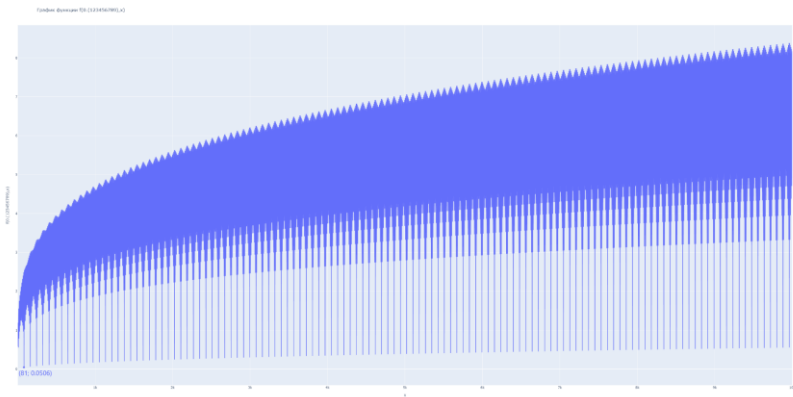


Рисунок 23. График функции $f(a; x)$ для $\alpha = \frac{13\,717\,421}{111\,111\,111}$ на $[1; 10000]$.

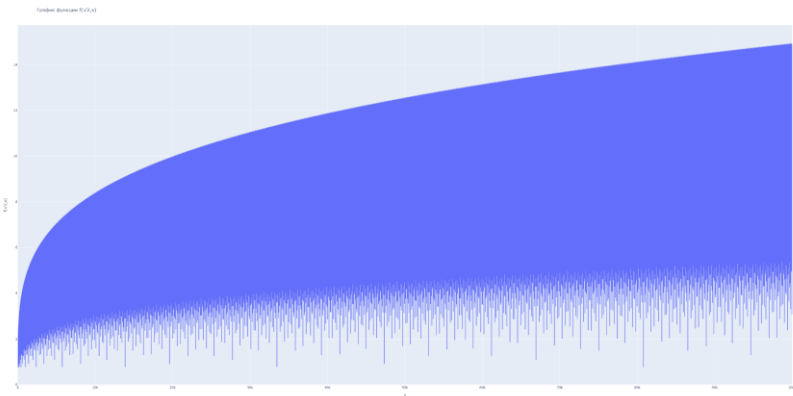


Рисунок 24. График функции $f(a; x)$ для $\alpha = \frac{23\,456\,789}{123\,456\,789}$ на $[1; 10000]$.