

ЛОГИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Задания ЕГЭ №2

Логические формулы

	Закон	Для дизъюнкции $\vee$	Для конъюнкции $\wedge$
1	переместительный (закон коммутативности)	$A \vee B = B \vee A$	$A \wedge B = B \wedge A$
2	сочетательный (закон ассоциативности)	$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$	$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$
3	распределительный (закон дистрибутивности)	$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
4	де Моргана	$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$	$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$
5	идемпотентности	$A \vee A = A$	$A \wedge A = A$
6	поглощения	$A \vee A \wedge B = A$	$A \wedge (A \vee B) = A$
7	склеивания	$(A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge B) = B$	$(A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee B) = B$
8	исключенного третьего	$A \vee \overline{A} = 1$	
9	непротиворечия		$A \wedge \overline{A} = 0$
10	исключения констант	$A \vee 0 = A \quad A \vee 1 = 1$	$A \wedge 1 = A \quad A \wedge 0 = 0$
11	двойного отрицания	$\overline{\overline{A}} = A$	

$$A \rightarrow B = \neg A \vee B$$

$$A \equiv B = (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

$$A \oplus B = (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$$

Программирование логических операций

Логическая операция	Представление в Питоне
Отрицание $\neg$	not()
Логическое умножение $\wedge$	and
Логическое сложение $\vee$	or
Следование $A \rightarrow B$	not(A) or B
Равносильность $\equiv$	==

Задание ЕГЭ №2

Задача (Классическая)

Миша заполнял таблицу истинности логической функции F

$$(w \rightarrow z) \wedge ((y \rightarrow x) \equiv (z \rightarrow y)),$$

но успел заполнить лишь фрагмент из трёх различных её строк, даже не указав, какому столбцу таблицы соответствует каждая из переменных w, x, y, z .

				F
1			0	1
	0	1		1
1	0	0	1	1

Определите, какому столбцу таблицы соответствует каждая из переменных w, x, y, z .

В ответе напишите буквы w, x, y, z в том порядке, в котором идут соответствующие им столбцы (сначала буква, соответствующая первому столбцу; затем буква, соответствующая второму столбцу, и т.д.). Буквы в ответе пишите подряд, никаких разделителей между буквами ставить не нужно.

Решение

```
print('x y z w')
for x in range(0, 2):
    for y in range(0, 2):
        for w in range(0, 2):
            for z in range(0, 2):
                if (not(w) or z) and ((not(y) or x) == (not(z) or y)):
                    print(x, y, z, w)
```

Ответ: xwzy

Задача (Классическая, закрепление)

Миша заполнял таблицу истинности функции $(x \equiv \neg y) \rightarrow ((x \wedge w) \equiv z)$, но успел заполнить лишь фрагмент из трёх различных её строк, даже не указав, какому столбцу таблицы соответствует каждая из переменных w, x, y, z .

				F
1	1			0
1	1		1	0
	1	1		0

Определите, какому столбцу таблицы соответствует каждая из переменных w, x, y, z .

В ответе напишите буквы w, x, y, z в том порядке, в котором идут соответствующие им столбцы (сначала буква, соответствующая первому столбцу; затем буква, соответствующая второму столбцу, и т.д.). Буквы в ответе пишите подряд, никаких разделителей между буквами ставить не нужно.

Решение

```
print('x y z w')
for x in range(0, 2):
    for y in range(0, 2):
        for w in range(0, 2):
            for z in range(0, 2):
                if not( not(( x == (not(y)) )) or ((x and w) == z) ):
                    print(x, y, z, w)
```

Ответ: yzxw

Задача (Сложная функция)

Логическая функция F задаётся выражением $((x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow w)) \vee (z \equiv (x \vee y))$.

Дан частично заполненный фрагмент, содержащий **неповторяющиеся** строки таблицы истинности функции F . Определите, какому столбцу таблицы истинности соответствует каждая из переменных x, y, z, w .

Переменная 1	Переменная 2	Переменная 3	Переменная 4	Функция
???	???	???	???	F
1			1	0
1				0
	1		1	0

В ответе напишите буквы x, y, z, w в том порядке, в котором идут соответствующие им столбцы (сначала — буква, соответствующая первому столбцу; затем — буква, соответствующая второму столбцу, и т. д.). Буквы в ответе пишите подряд, никаких разделителей между буквами ставить не нужно.

Решение

```
print('x y z w')
for x in range(0, 2):
    for y in range(0, 2):
        for w in range(0, 2):
            for z in range(0, 2):
                if not( ((not(x) or y) and (not(y) or w)) or (z == (x or y)) ):
                    print(x, y, z, w)
```

Ответ: ywzx

Задача (Три переменные)

(№ 1608) Логическая функция F задаётся выражением $(\neg x \wedge z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z)$

?	?	?	F
0	0	0	1
0	0	1	1
1	0	1	1

На рисунке приведён фрагмент таблицы истинности функции F , содержащий все наборы аргументов, при которых функция F истинна. Определите, какому столбцу таблицы истинности функции F соответствует каждая из переменных x, y, z .

Решение

```
print('x y z')
for x in range(0, 2):
    for y in range(0, 2):
        for z in range(0, 2):
            if (not(x) and z) or (not(x) and not(y) and not(z)):
                print(x, y, z)
```

Ответ: yxz

Задача (Разные значения функции)

Логическая функция F задаётся выражением $(\neg a \vee b \vee \neg c) \wedge (b \vee \neg c)$. Определите, какому столбцу таблицы истинности функции F соответствует каждая из переменных a, b, c .

?	?	?	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

В ответе напишите буквы a, b, c в том порядке, в котором идут соответствующие им столбцы (без разделителей).

Решение

Когда такая ситуация, что функция имеет различные значения в таблице, мы можем проверить, какие значения переменных дают единицу у всей функции. А потом проверить, какие значения выдают ноль у всей функции, если это потребуется.

```
print('a b c')
for a in range(0, 2):
    for b in range(0, 2):
        for c in range(0, 2):
            if (not(a) or b or not(c)) and (b or not(c)):
                print(a, b, c)
```

Ответ: bac

Задание ЕГЭ №15

Задача (Неравенство, одна переменная)

Какое количество натуральных чисел удовлетворяет логическому условию:

$$\neg(X^2 \geq 9) \vee \neg((X < 7) \vee (X \geq 10)) ?$$

Решение:

Первый способ (с помощью питона).

```
k=0
for x in range(1, 1000):
    if not(x**2 >= 9) or not((x < 7) or (x>=10)):
        k = k + 1

print(k)
```

Задание ЕГЭ №15

Второй способ (с помощью рассуждений)

$$: \neg(X^2 \geq 9) = (X^2 < 9).$$

Получается, что выражение $(X^2 < 9)$ будет истинно только при двух значениях: $X = 1, X = 2$.

Во втором выражении $\neg((X < 7) \vee (X \geq 10))$ удобно применить формулу Де Моргана.

Формула де Моргана:

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$$

$$\neg((X < 7) \vee (X \geq 10)) = \neg(X < 7) \wedge \neg(X \geq 10) = (X \geq 7) \wedge (X < 10)$$

$$X = 7, X = 8, X = 9.$$

Ответ: 5 чисел

Задание ЕГЭ №15

Задача (Неравенство, две переменные)

Для какого наибольшего целого неотрицательного числа A выражение

$$(x \geq A) \vee (y \geq A) \vee (x * y \leq 205)$$

тождественно истинно, т.е. принимает значение 1 при любых целых положительных x и y ?

Решение:

Первый способ (с помощью питона).

```
for A in range(0, 300):
    k=0
    for x in range(1, 301):
        for y in range(1, 301):
            if (x >= A) or (y >= A) or (x * y <= 205):
                k=k+1
    if k==90000:
        print(A)
```

Задание ЕГЭ №15

Задача (Функция ДЕЛ)

Обозначим через **ДЕЛ(n, m)** утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m». Для какого наибольшего натурального числа A формула

$$\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 6) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 9))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение:

Первый способ (с помощью питона).

```
def D(n, m):  
    if n%m==0:  
        return True  
    else:  
        return False  
  
for A in range(1, 1000):  
    k=0  
    for x in range(1, 1001):  
        if D(x, A) or (not(D(x, 6)) or not(D(x, 9))):  
            k=k+1  
    if k==1000:  
        print(A)
```

Задание ЕГЭ №15

Задача (Поразрядная конъюнкция)

Обозначим через $m \& n$ поразрядную конъюнкцию неотрицательных целых чисел m и n . Так, например, $14 \& 5 = 1110_2 \& 0101_2 = 4$

Для какого наименьшего неотрицательного целого числа A формула

$$x \& 51 \neq 0 \rightarrow (x \& A = 0 \rightarrow x \& 25 \neq 0)$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом неотрицательном целом значении переменной x)?

Решение:

Первый способ (с помощью питона).

```
for A in range(0, 1000):  
    k=0  
    for x in range(0, 1000):  
        if x&51==0 or (x&A!=0 or x&25!=0):  
            k=k+1  
  
    if k==1000:  
        print(A)
```