

Задание №16

Рекурсия

В программировании **рекурсией** называется процесс, когда функция вызывает сама себя или, когда две функции попарно вызывают друг друга.

Что такое Функция в языке программирования Python ?

Функция - это подпрограмма, результатом работы которой может являться определенное значение.

Рассмотрим **пример функции**, которая **суммирует два числа!**

```
def F(x, y):  
    s = x + y  
    return s
```

```
a = int(input())  
b = int(input())
```

```
r = F(a, b)
```

```
print(r)
```

Здесь функция **F**, которая суммирует два числа. В главной части программы запрашиваются два числа с клавиатуры: **a** и **b**! Эти два числа передаются в функцию **F**. В функции эти числа кладутся в локальные переменные **x** и **y**. Сумма переменных **x** и **y** записывается в переменную **s**. Переменная **s** возвращается, как результат работы функции **F**. Результат работы функции будет помещён в переменную **r** (в строке `r = F(a, b)`) в основной части программы. Таким образом, в переменной **r** будет сумма двух переменных **a** и **b**.

Задача (Стандартная)

Алгоритм вычисления значения функции $F(n)$, где n – натуральное число, задан следующими соотношениями:

$F(n) = 1$ при $n = 1$;

$F(n) = n + F(n - 1)$, если n – чётно,

$F(n) = 3 \times F(n - 2)$, если $n > 1$ и при этом n – нечётно.

Чему равно значение функции $F(25)$?

Решение:

Напишем программу для решения данной задачи.

В начале опишем все правила, которые даны в условии задачи для функции.

В основной части программы запустим эту функцию.

Сама функция

```
def F(n):  
    if n==1: return 1  
    if n%2==0: return n+F(n-1)  
    if n>1 and n%2!=0: return 3*F(n-2)
```

Основная часть программы

```
print(F(25))
```

Выражение $n \% 2 \neq 0$ (остаток от деления на "2" не равен нулю) обозначает нечётное число. Выражение $n \% 2 == 0$ обозначает чётное число.

Ответ: 531441

Задача (стандартная)

Алгоритм вычисления значения функции $F(n)$, где n – натуральное число, задан следующими соотношениями:

$$F(1) = 1$$

$$F(2) = 3$$

$$F(n) = F(n-1) * n + F(n-2) * (n - 1), \text{ при } n > 2$$

Чему равно значение функции $F(8)$? В ответе запишите только натуральное число.

Решение:

Сама функция

```
def F(n):  
    if n==1: return 1  
    if n==2: return 3  
    if n>2: return F(n-1)*n + F(n-2)*(n-1)
```

Основная часть программы

```
print(F(8))
```

Ответ: 148329

Задача(Две функции)

Алгоритм вычисления значения функций $F(n)$ и $G(n)$, где n — натуральное число, задан следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} F(n) &= 0, \text{ если } n \leq 2, \\ F(n) &= G(n - 2), \text{ если } n > 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(n) &= 0, n \leq 1, \\ G(n) &= F(n - 1) + n, \text{ если } n > 1 \end{aligned}$$

Чему равно значение функции $F(8)$?

В ответе запишите только натуральное число.

Сами функции

```
def F(n):  
    if n<=2: return 0  
    if n>2: return G(n-2)
```

```
def G(n):  
    if n<=1: return 0  
    if n>1: return F(n-1)+n
```

Основная часть программы

```
print(F(8))
```

Ответ: 9

Задача (Количество значений)

Алгоритм вычисления значения функции $F(n)$, где n – натуральное число, задан следующими соотношениями:

$$F(n) = 2 * n * n * n + 1, \text{ при } n > 25$$

$$F(n) = F(n+2) + 2 * F(n+3), \text{ при } n \leq 25$$

Определите количество натуральных значений n из отрезка $[1; 1000]$, для которых значение $F(n)$ кратно 11.

Решение:

Сама функция

```
def F(n):  
    if n>25: return 2*n*n*n + 1  
    if n<=25: return F(n+2) + 2*F(n+3)
```

k=0

Перебираем диапазон

```
for i in range(1, 1001):  
    if F(i)%11==0:  
        k=k+1
```

```
print(k)
```

Ответ: 91

В начале формируем функцию F. Затем перебираем числа из диапазона от 1 до 1000. Каждое число подставляем в функцию F. Если значение функции F делится на 11, то мы зачитываем такое значение i.

Задача (Новое)

Алгоритм вычисления значения функции $F(n)$, где n – натуральное число, задан следующими соотношениями:

$$F(n) = 2, \text{ если } n = 1,$$

$$F(n) = 2 \cdot F(n - 1), \text{ если } n > 1.$$

Чему равно значение выражения $F(1900)/2^{1890}$?

Решение:

Чтобы уменьшить цепочку вызовов функции, можно использовать инструмент `lru_cache`.

```
from functools import lru_cache
```

```
@lru_cache(None)
```

```
def F(n):
```

```
    if n==1: return 2
```

```
    if n>1: return 2*F(n-1)
```

```
for i in range(2, 1900):
```

```
    F(i)
```

```
print(F(1900)/2**1890)
```

Ответ: 1024

В задаче функция опирается на значение функции от $n-1$ и т.д. За счёт этого происходят длинные вычисления для каждого числа n .

Используя инструмент `lru_cache`, мы пробегаемся в цикле по значениям n в возрастающем порядке, и для каждого значения сохраняем результаты функции. Таким образом, вычисляя очередное значение, программа опирается на уже готовый результат, тем самым цепочка вызовов функции будет маленькой.

Задача (Новое, закрепление)

Алгоритм вычисления значения функции $F(n)$, где n — натуральное число, задан следующими соотношениями:

$$F(n) = 1 \text{ при } n \leq 2;$$

$$F(n) = n * F(n-2), \text{ если } n > 2.$$

Чему равно значение выражение $F(3000)/F(2996)$?

Решение:

1 Способ (Аналитическое решение)

Начнём расписывать $F(3000)$.

$$F(3000) = 3000 * F(2998) = \\ 3000 * 2998 * F(2996)$$

Получается:

$$F(3000)/F(2996) = \\ 3000 * 2998 * F(2996)/F(2996) = \\ 3000 * 2998 = 8994000$$

```
from functools import lru_cache
```

```
@lru_cache(None)
```

```
def F(n):
```

```
    if n<=2: return 1
```

```
    if n>2: return n*F(n-2)
```

```
for i in range(2, 3000):
```

```
    F(i)
```

```
print(F(3000)/F(2996))
```

Ответ: 8994000

Задача

Алгоритм вычисления значения функции $F(n)$,
где n — натуральное число, задан следующими соотношениями:

$$F(n) = 1 \text{ при } n=1;$$

$$F(n) = 2 \text{ при } n=2;$$

$$F(n) = n * (n-1) + F(n-1) + F(n-2), \text{ если } n > 2.$$

Чему равно значение функции $F(2023) - F(2021) - 2 * F(2020) - F(2019)$?

```
from functools import lru_cache
```

```
@lru_cache(None)
```

```
def F(n):
```

```
    if n==1: return 1
```

```
    if n==2: return 2
```

```
    if n>2: return n*(n-1) + F(n-1) + F(n-2)
```

```
for i in range(2, 2023):
```

```
    F(i)
```

```
print(F(2023) - F(2021) - 2*F(2020) - F(2019))
```

Ответ: 12259388

Задания ЕГЭ

Алгоритм вычисления значения функции $F(n)$, где n — натуральное число, задан следующими соотношениями:

$F(n) = 2$ при $n \leq 2$;

$F(n) = 2 \cdot F(n - 1) + F(n - 2)$
при $n > 2$.

Чему равно значение функции $F(5)$? В ответе запишите только натуральное число.

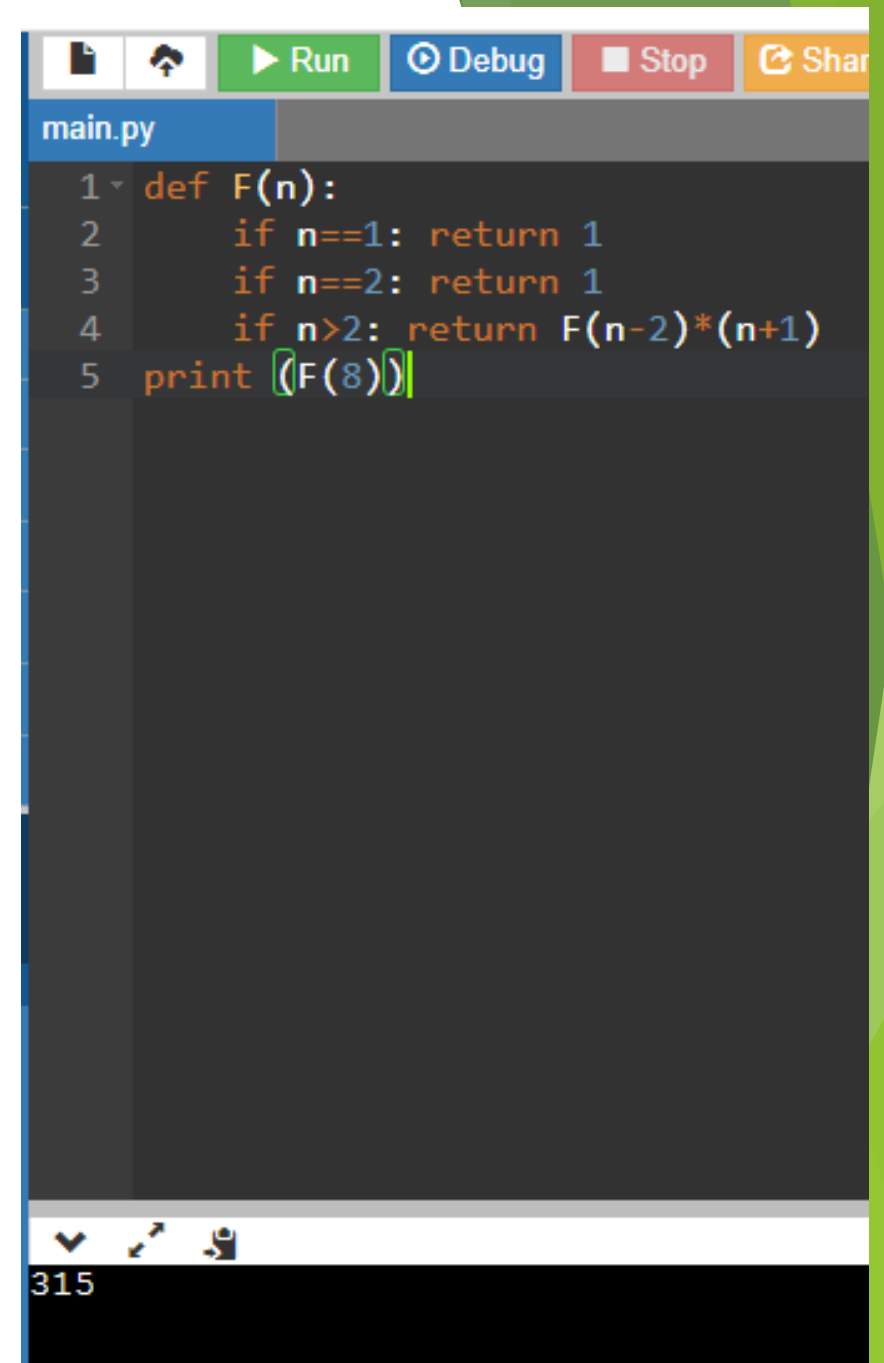
main.py

```
1 def F(n):  
2     if n<=2: return 2  
3     if n>2: return 2*F(n-1)+F(n-2)  
4 print (F(5))
```

Алгоритм вычисления значения функции $F(n)$, где n — натуральное число, задан следующими соотношениями:

**$F(1) = 1; F(2) = 1;$
 $F(n) = F(n - 2) * (n + 1)$
при $n > 2$.**

Чему равно значение функции $F(8)$? В ответе запишите только натуральное число.

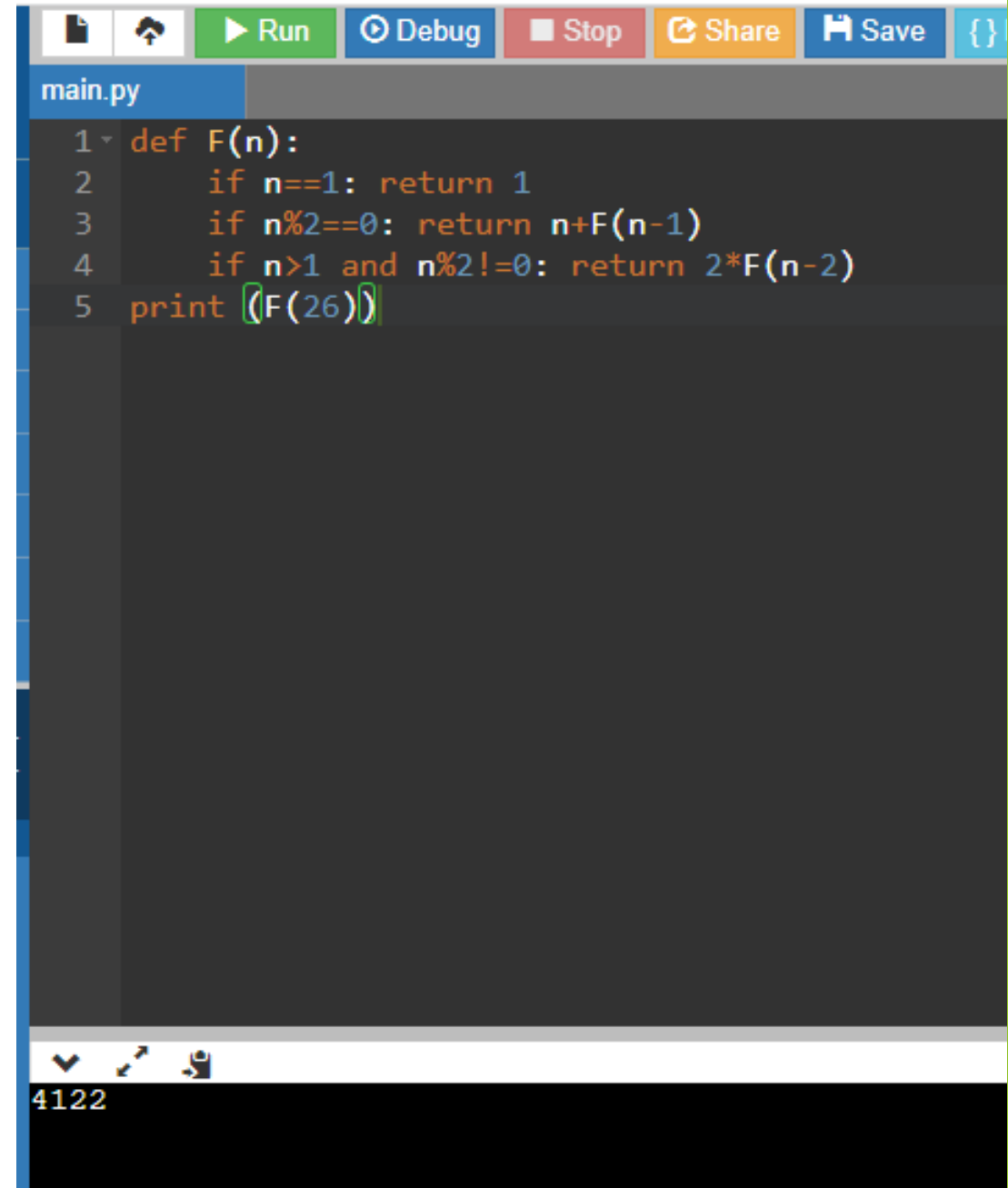


The screenshot shows a Python IDE window titled 'main.py'. The code defines a function `F(n)` with the following logic: `def F(n):`, `if n==1: return 1`, `if n==2: return 1`, `if n>2: return F(n-2)*(n+1)`, and `print (F(8))`. The function is called with `F(8)`. At the bottom of the IDE, the output is displayed as `315`.

```
main.py
1 def F(n):
2     if n==1: return 1
3     if n==2: return 1
4     if n>2: return F(n-2)*(n+1)
5 print (F(8))
```

315

Алгоритм вычисления значения функции $F(n)$, где n — натуральное число, задан следующими соотношениями:
 $F(n) = 1$ при $n = 1$;
 $F(n) = n + F(n - 1)$,
если n чётно,
 $F(n) = 2 * F(n - 2)$,
если $n > 1$ и при этом n нечётно.
Чему равно значение функции $F(26)$?



```
main.py
1 def F(n):
2     if n==1: return 1
3     if n%2==0: return n+F(n-1)
4     if n>1 and n%2!=0: return 2*F(n-2)
5 print (F(26))
```

4122

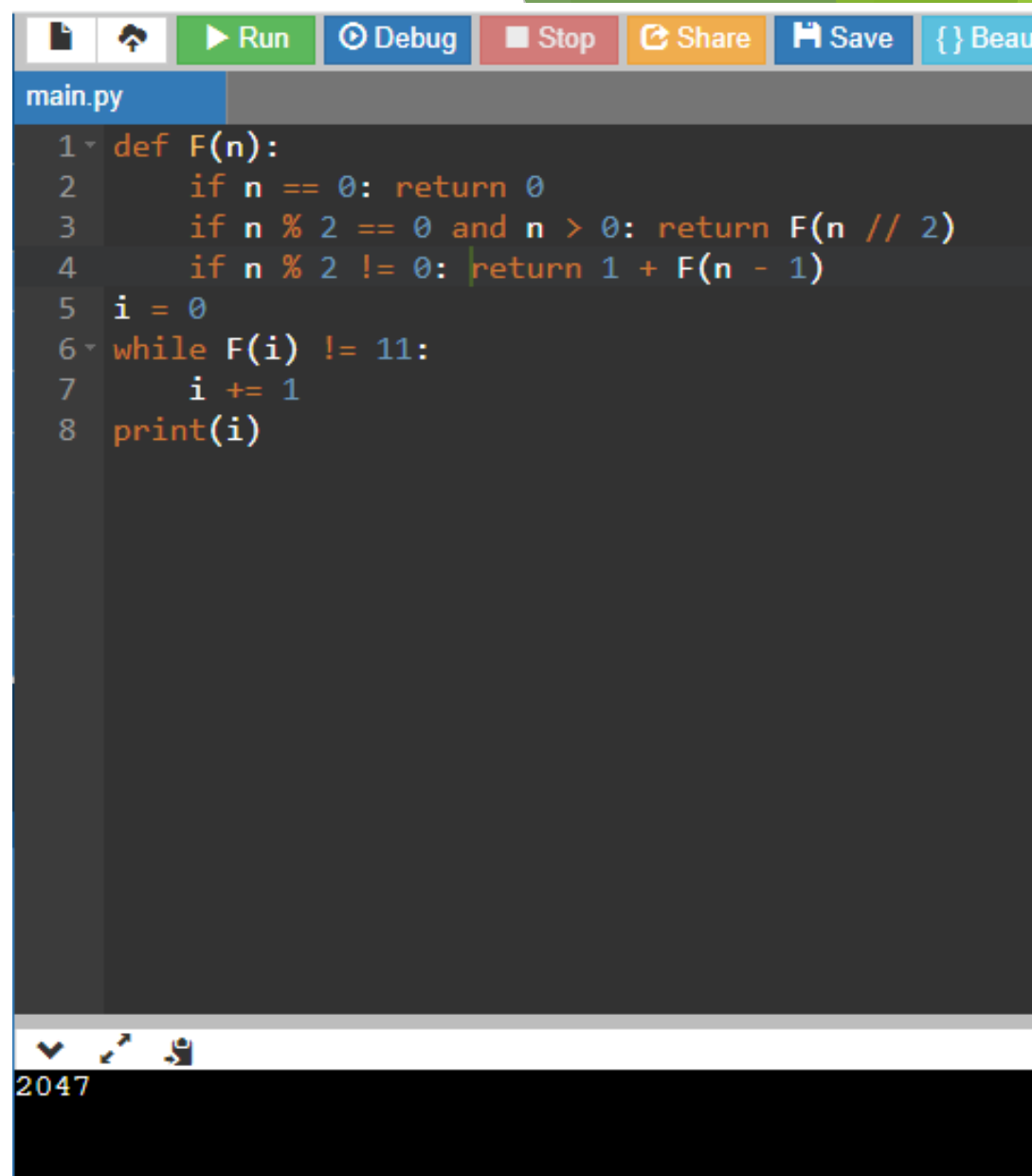
Алгоритм вычисления значения функции $F(n)$, где n — целое неотрицательное число, задан следующими соотношениями:

$$F(0) = 0;$$

$F(n) = F(n / 2)$, если $n > 0$ и при этом n чётно;

$F(n) = 1 + F(n - 1)$, если n нечётно.

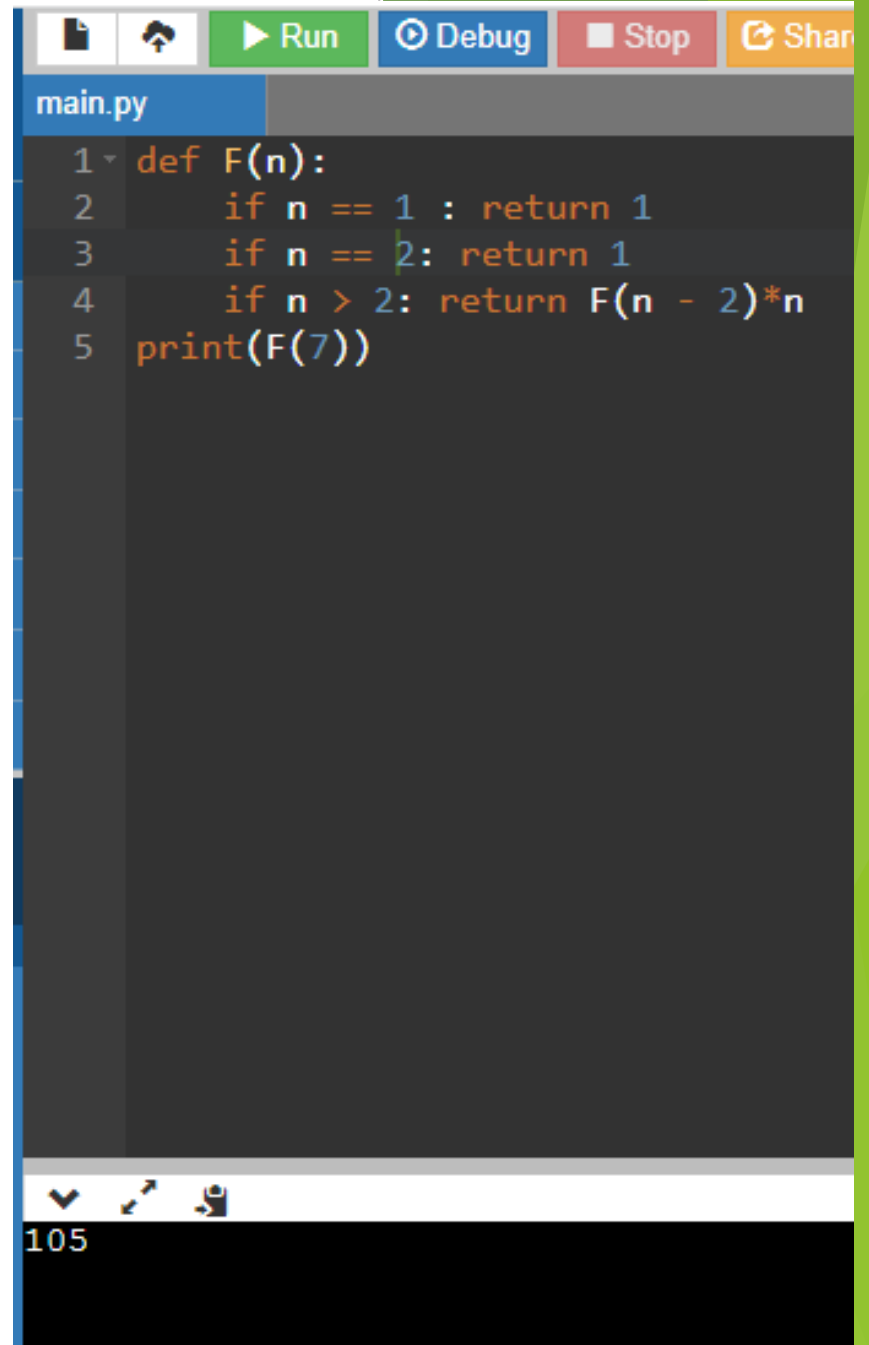
Назовите минимальное значение n , для которого $F(n) = 11$.



```
main.py
1 def F(n):
2     if n == 0: return 0
3     if n % 2 == 0 and n > 0: return F(n // 2)
4     if n % 2 != 0: return 1 + F(n - 1)
5     i = 0
6     while F(i) != 11:
7         i += 1
8     print(i)
```

2047

Алгоритм вычисления значения функции $F(n)$, где n - натуральное число, задан следующими соотношениями:
 $F(1) = 1$; $F(2) = 1$;
 $F(n) = F(n-2) * n$ при $n > 2$.
Чему равно значение функции $F(7)$? В ответе запишите только натуральное число.



The screenshot shows a Python IDE window titled 'main.py'. The code defines a function `F(n)` with the following logic: if `n == 1`, return 1; if `n == 2`, return 1; if `n > 2`, return `F(n - 2) * n`. The function is called with `print(F(7))`. The output at the bottom of the window is 105.

```
1 def F(n):  
2     if n == 1 : return 1  
3     if n == 2: return 1  
4     if n > 2: return F(n - 2)*n  
5 print(F(7))
```

105