

Исследовательская работа:
«Математические методы сочинения музыки»

Садриева Элиза
МБОУ «Лицей №177»,
9 класс,
Ново-Савиновский район,
Город Казань.

Научный руководитель:
Сайфутдинова Елена Валерьевна,
учитель математики
высшей квалификационной категории
МБОУ «Лицей №177».

Казань 2023

Оглавление

Введение	3
Глава 1. Методы написания музыки	3
1.1. История взаимодействия музыки и математики.....	4
1.2. Матрица Булеза	4
1.3. Магический квадрат Меркурия.....	5
Глава 2. Практическое применение математических способов для сочинения музыки.....	7
2.1. Сочинение музыки с помощью матрицы Булеза.....	7
2.2. Сочинение музыки с помощью магического квадрата Меркурия.....	8
2.3. Сравнение полученных методов	9
Выводы	10
Заключение	10
Приложение.....	11

Введение

Математика и музыка, кажется, не имеют ничего общего, ведь математика - точная наука, а музыка - искусство.

Однако на самом деле это не так. Учась в музыкальной школе, я заинтересовалась связью между музыкой и математикой и поняла, что у них есть много общего.

Более того, этой связи нашлось применение. В результате длительного взаимодействия этих математики и музыки родился новый тип музыки – электронная музыка. Сочиняя такую музыку, композиторы основываясь на математических правилах, понятиях и расчётах. С каждым годом электронная музыка развивается и набирает всё большую популярность.

В данной исследовательской работе я решила рассмотреть разные способы написания музыки математическими методами и попробовать написать своё авторское произведение.

Цель: исследовать разные способы написания музыки математическими методами и выделить наиболее эффективный.

Для достижения поставленной цели мной были сформулированы следующие **задачи**:

- изучить различные источники по данной теме;
- проанализировать и систематизировать полученную информацию;
- рассмотреть и сравнить разные математические способы написания музыки, выделить наиболее эффективный;
- написать своё авторское произведение с помощью каждого способа и выбрать наиболее гармонично звучащее произведение.

Гипотеза: писать музыку с помощью математических методов возможно

Объект исследования: связь между музыкой и математикой

Предмет исследования: математические методы написания музыки

Методы исследования: анализ полученной из разных источников информации, эксперименты по написанию музыки с помощью полученных способов, сравнение и анализ найденных способов.

Глава 1. Методы написания музыки

1.1. История взаимодействия музыки и математики

Издавна люди видели связь математики и музыки. Не случайно многие математики были одновременно теоретиками музыки. Например, Пифагор пытался представить музыку как математическую модель. Начиная с того, что записывал музыкальные интервалы в виде отношения частот, создал учение о звуке и открыл математические связи между отдельными звуками. Ему удалось вывести математические закономерности, описывающие строение лада. Лад – взаимосвязь музыкальных звуков, определяемая зависимостью неустойчивых звуков от устойчивых. В нём присутствует основной устойчивый звук – тоника. В результате Пифагор создал свой музыкальный строй – математическое выражение определённой системы звуковысотных отношений, представив лад как математическую модель. Его открытие использовалось для настройки музыкальных инструментов (чаще всего лиры). Однако строй Пифагора имел недостатки, поскольку для того, чтобы сыграть мелодию с другой ноты, инструмент каждый раз нужно было перенастраивать. Также Пифагор сформулировал законы построения консонансов (музыкальных созвучий, приятных на слух). Это было первым шагом к написанию музыки с помощью математики, ведь человек получил возможность вычислить интервал, который будет хорошо восприниматься человеческим слухом.

С течением времени интерес к математическим методам написания музыки не угасал. Например, в 1793 году было опубликовано сочинение, приписываемое Моцарту. В нём рассказывалось о способе сочинения музыки с помощью игры в кости. Композиторы венской классической школы, Бах и многие другие тоже так или иначе использовали музыку при сочинении своих произведений. Позже попытки разработки подобных методов предпринимались и Леонардом Эйлером, который был теоретиком музыки.

Однако расцвет применения математических методов в музыке случился гораздо позднее, после изобретения компьютеров и развития новых технологий. Появились программы, позволяющие выполнять вычисления за композитора. В настоящее время математическая музыка всё ещё развивается, появляются новые математические методы написания музыки.

1.2. Матрица Булеза

Пьер Булез – современный французский композитор, известный благодаря множеству произведений. После окончания Парижской консерватории Булез совмещал сочинительство музыки с дирижёрской деятельностью, причём оркестры под его руководством наиболее часто исполняли произведения композиторов, изучавших взаимодействие математики и музыки (Бела Барток, Вольфганг Амадей Моцарт и др.). Таким образом, он познакомился с

математическим творчеством. Позже математика вдохновило расширение возможностей электронной музыки и рост её популярности. Он начал экспериментировать с электронной музыкой и писать музыку с помощью математики, будучи председателем института IRCAM, занимающегося исследованиями в области акустики и современной музыки.

Во время инструментальных концертов оркестра Булеза нередко звучали произведения Оливье Мессиана. Именно его работа «Mode de valeurs» стала основой для создания математического метода сочинения музыки Булеза – матрицы (объект, записываемый в виде прямоугольной таблицы элементов, состоящий из совокупности строк и столбцов, на пересечении которых находятся элементы матрицы). Используя музыкальный ряд из произведения Мессиана, математики присвоил первым 12 высотам тона целые числа от одного до 12. H=1, D=2, A=3 и т.д. Этот числовой ряд лёг в основу первой строки и первого столбца Р-матрицы (буквы были присвоены для того, чтобы различать две матрицы). Чтобы получить остальные 11 строк, Пьер Булез взял за правило то, первая строка матрицы соответствует первому столбцу, вторая строка соответствует второму столбцу и т.д. Чтобы получить Р-матрицу, он произвольно изменил порядок чисел в числовом ряду от 1 до 12 (надо понимать, что при составлении своих матриц Булез часто прибегал к экспериментальному пути, исправляя матрицы до тех пор, пока он не смог качественно сочинить с их помощью музыку). Например, числовой ряд случайным образом видоизменили так, чтобы ряд из чисел начинался с цифры 2 (2, 8, 4, 5, 6, 11, 1, 9, 12, 3, 7, 10). Этот ряд был помещён во вторую строку и во второй столбец. Аналогично Булез составил числовой ряд, начинающийся на 3, 4, 5, 6 и т.п., завершив свою первую матрицу.

Далее он поменял местами ноты в строке Мессиана так, что получился приятный на слух и более-менее логичный музыкальный ряд. Потом Булез изменил порядок в ряду из 12 чисел в соответствии с изменёнными нотами. Таким образом, первая строка Р-матрицы (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12) превратилась в первую строку и первый столбец новой I-матрицы (7,3,10,12,9,2,11,6,4,8,5). При составлении остальных 11 строк Булез поступил так же, как и с первой матрицей. Он экспериментально и произвольно менял порядок чисел в ряду первой строки и записывал во вторую строку и второй столбец новой матрицы.

Таким образом, можно пронумеровать ноты любого произведения согласно Р-матрице, а потом изменить произведение, поменяв ноты местами согласно I-матрице. Например, нумеруем первые 12 нот любого произведения соответственно от 1 до 12, а затем седьмое число ставим на первое место, третье ставим на второе место и т.п. (соответственно числовому ряду первой строки I-матрицы).

1.3. Магический квадрат Меркурия

Английский композитор Питер Максвелл Дэйвис начинал композиторский путь, уже вдохновлённый идеей создания математического метода написания музыки. Он во многом брал пример с Булеза. Музыкальные

теоретики отмечали родство между работами Максвелла и Булеза середины 50-ых годов. Даже в математический метод Максвелла весьма сильно перекликается с матрицами Булеза.

Когда Максвелл закончил Королевский Манчестерский колледж музыки, ему пришла в голову идея создания музыки с помощью магических квадраты (по структуре они схожи с матрицей Булеза, однако в магическом квадрате сумма цифр каждой строки, столбца или диагонали равна одному и тому же числу). За эту особенность их и называют магическими. Магическим квадратам всегда придавалось большое значение, люди верили в их мистические свойства. До сих пор они используются в различных гаданиях и работе астрологов. Они представляют собой ту же матрицу Булеза, но сумма цифр каждой строки, столбца или диагонали квадрата равняется одному и тому же числу. Максвелл создал магический квадрат Меркурия (название придумано самим автором), в котором сумма каждой строки, столбца или диагонали равняется 260.

Для создания способа написания музыки с помощью квадрата Меркурия, Максвелл использовал средневековое произведение «*Veni sancta spiritus*», использующееся во время мессы в римской католической церкви (автор неизвестен). Композитор взял первые восемь нот из этого произведения и поместил их в первую строку и первый столбец своей матрицы (он взял именно восемь нот, чтобы получить матрицу такого же размера, как и квадрат Меркурия). Получилась следующая последовательность: G, E, F, D, F#, A, G#, C. Здесь перечислено восемь нот, четырёх не хватает, чтобы перечислить все ноты октавы. Поэтому Максвелл действовал при составлении матрицы также, как Булез (произвольно-экспериментальное изменение порядка нот) далее действовав так же, как и Булез, однако добавил в последующие ряды недостающие ноты)

Получив матрицу, Максвелл начал связывать её с магическим квадратом Меркурия. Сначала он пронумеровал все ноты в матрице последовательно от 1 до 64. В магическом квадрате Меркурия также расположены числа от 1 до 64, только в другом порядке. Используя это, композитор присвоил каждому числу квадрата Меркурия ту ноту, которая относится к этому числу в матрице Максвелла.

Для того чтобы сочинить своё авторское произведение с помощью способа Максвелла, нужно рассмотреть любое произведение другого автора. Каждую ноту этого произведения нужно найти на матрице Максвелла, а затем найти ноту с таким же расположением в квадрате Меркурия. После

этого можно записывать её в своё произведение. Например, я нашла произведение, которое начинается с ноты «фа». В матрице она расположена в первой строке третьей слева. В квадрате Меркурия такое же расположение имеет нота «си бемоль». Значит, последнюю я записываю в своё авторское произведение.

Глава 2. Практическое применение математических способов для сочинения музыки

2.1. Сочинение музыки с помощью матрицы Булеза

Сейчас я сочиню своё авторское произведение с помощью изменения уже существующего (матрицами Булеза). Для этого я выбрала “Rafaello” Дмитрия Рябцева. Сначала я записала первую строку I-матрицы в обратном порядке (5, 8, 4, 6, 11, 2, 9, 12, 10, 3, 7, 1). Затем я изменила порядок чисел в ряду также, как Булез при превращении первой строки P-матрицы в первую строку I-матрицы. Поскольку Булез не разработал алгоритм изменения длительностей и тональности произведения, они останутся неизменными.

Сначала я пронумеровала первые 12 нот (ре=1, ми=2, фа=3, ре=4, до =5 и т.п.). Затем я изменила порядок в соответствии с I-матрицей. Первая нота осталась на месте, вторая стала седьмой и т.д. (получился следующий ряд: ре, ми, фа, соль, си, фа, ми, ля, ре, ре, до, до). Далее я пронумеровала следующие 12 нот от 2 до 10 (в соответствии со второй строкой P-матрицы: 2, 8, 4, ,5 ,6, 11, 1, 9, 12, 3, 7, 10). Затем я поставила ноту под номером 7 на первое место,

ноту под номером 11 на второе, под номером 10 на третье и т.п. (получился следующий ряд: ми, фа бекар, фа, соль, ля, ре, до, си, фа, ля, соль диез, соль). Аналогично я поступила с остальными строками матриц, дойдя до 4. Поскольку количество нот в произведении не делятся нацело на 12, то оставшиеся две ноты я просто записала в обратном порядке.

Поскольку матрицы были составлены в большей степени случайно и экспериментально, я решила повторить путь Булеза и понять, уникальны ли его матрицы (или же мой случайный порядок также сгодится для написания произведения).

Составление своей I-матрицы я начну с первой строки. Для этого я запишу первую строку I-матрицы Булеза в обратном порядке (5, 8, 4, 6, 11, 2, 9, 12, 10, 3, 7, 1), тот числовой ряд станет первой строкой Р-матрицы, а затем я поменяю порядок чисел в полученном ряду так же, как это сделал Булез, когда получил первую строку своей I-матрицы из первой строки Р-матрицы. Булез при изменении первой строки Р-матрицы. Булез при изменении первой строки Р-матрицы (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12) первое число оставил без изменения, вторым записал седьмое по счёту, третье оставил без изменения, четвёртым записал десятое по счёту, пятым записал двенадцатое по счёту и т.п. Я поступлю аналогично.

Таким образом, первая строка моей Р-матрицы превратилась в первую строку моей I-матрицы (5, 9, 4, 3, 1, 10, 8, 7, 2, 6, 12, 11). Далее я записала в обратном порядке вторую строку I-матрицы Булеза, которая станет второй строкой моей Р-матрицы (4, 2, 3, 5, 6, 1, 8, 9, 12, 10, 11, 7). После видоизменения по методу Булеза получился следующий числовой ряд: 4, 8, 3, 10, 7, 12, 2, 11, 1, 5, 9, 6. При составлении остальных строк матрицы я действовала аналогично. Поскольку я решила изменить то же самое произведение (для наглядности), матрица составлена мною до 4 строк.

2.2. Сочинение музыки с помощью магического квадрата Меркурия

Чтобы было удобнее сравнивать полученные авторские произведения, я буду работать с тем же произведением Дмитрия Рябцева.

Мы уже узнали о том, что Максвелл связал свою матрицу и магический квадрат Меркурия. Рассмотрим первую ноту произведения - "ре". Как мы видим, и в матрице Максвелла, и в магическом квадрате Меркурия данная нота повторяется несколько раз, однако соответствующие ноты в магическом квадрате Меркурия повторяются, так что в итоге получается всего два неповторяющихся соответствия. Поэтому в результате преобразования получатся две ноты, которые будут записываться в партитуру в виде интервала (созвучие из двух звуков, соотношение двух музыкальных звуков по их высоте). Нота "ре" присутствует в первой строке (четвёртая справа) и

восьмой строке (третья справа). В магическом квадрате Меркурия первой ноте соответствует нота “фа диэз”, второй ноте - “ля”. Таким образом, моё авторское произведение будет начинаться с малой терции (фа диэз и ля) - интервалу, который включает 1,5 тона. Далее будет показан весь процесс моей работы над своим авторским произведением (в виде таблицы).

Также я решила проверить, является ли таким уникальным магический квадрат Меркурия. Мне захотелось узнать, сработает ли способ Максвелла с другим магическим квадратом.

Мне удалось составить свой магический квадрат, в котором сумма всех строк, столбцов и диагоналей равна 42.

Для того чтобы поменять музыкальное произведение, требуется соотнести магический квадрат с матрицей, поэтому надо её составить. Для этого я просто запишу по порядку звуки по полутонам (поскольку полутонов 12, а цифр в квадрате 16, в конце звуки будут повторяться).

В матрице полутона пронумерованы от 1 до 16. Я решила, что во время написания моего авторского произведения с помощью этого магического квадрата будет использоваться способ, который слегка отличается от метода Максвелла. Начнём с первой ноты произведения. Ноте “ре” будет присвоен номер 1. В матрице этому номеру соответствует нота “до”. Переходим к магическому квадрату. Смотрим на первую цифру слева на первой строке - 6. Значит, нота “ре” заменяется на 6 номер матрицы (ми диэз). Работая с дальнейшими нотами, я буду двигаться слева направо (6, 16, 17, 3, 11, 9, 8, 14 и т.п.).

2.3. Сравнение полученных методов

Среди всех методов я хотела бы выделить метод написания музыкального произведения с помощью матриц Булеза. Произведения, написанные с помощью квадрата Меркурия, неприятны на слух, звучат некрасиво и негармонично, много диссонирующих интервалов (неблагозвучное, негармоничное, раздражающее, острое сочетание звуков или аккордов, вызывающее неприятные ощущения). Да, произведения, написанные с помощью матриц Булеза неидеальны и не смогут полностью заменить труд композитора, однако они выделяются на фоне остальных. Также я вполне довольна произведениями, написанными с помощью моих способов, основанных на методах Булеза и Максвелла.

Выводы

В ходе исследовательской работы я:

- нашла и ознакомилась с различными источниками информации по выбранной теме;
- проанализировала и систематизировала полученную информацию;
- рассмотрела различные способы написания музыки математическими методами;
- написала свои авторские произведения с при помощи каждого способа и выбрала наиболее эффективный.

Заключение

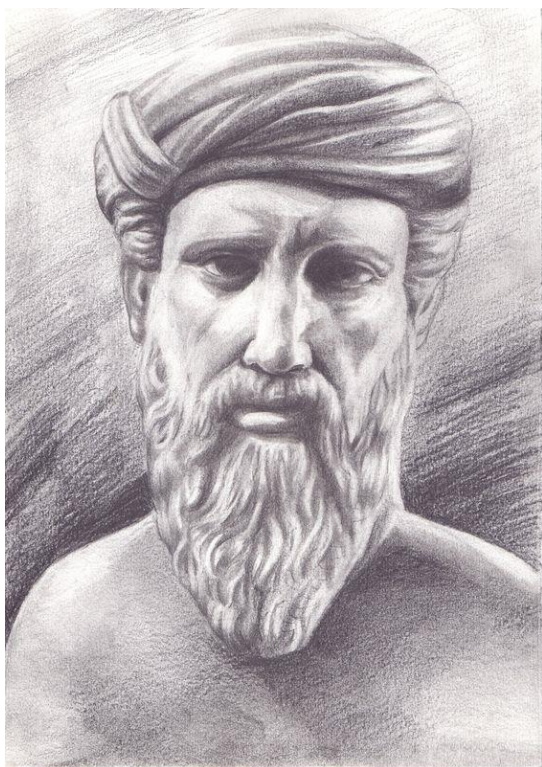
Изучая эту тему, я значительно расширила свой кругозор, узнала методы сочинения музыки при помощи математики, смогла сочинить несколько авторских произведений.

Моя гипотеза подтвердилась, поскольку сочинять музыку математическими методами действительно возможно. Однако такое произведение всё же уступает написанному с использованием композиторского таланта и вдохновения. Несмотря на это, математическая музыка сочиняется до сих пор, её качество со временем улучшается, так что её

расцвет ещё впереди. Уже сейчас математические методы могут стать опорой для композитора, который может просто доработать и улучшить написанную математическими методами музыку.

Приложение

Приложение №1. Пифагор



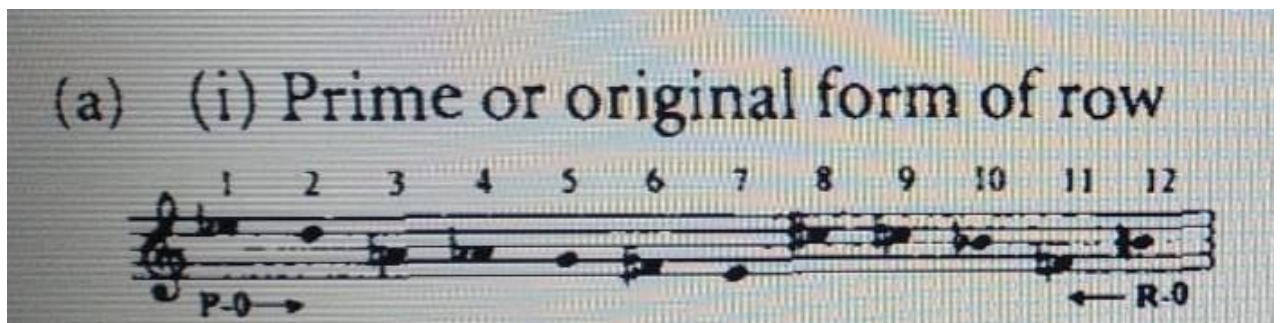
Приложение 2. Буквенные обозначения нот

Нота	Буквенное обозначение
До	C
Ре	D
Ми	E
Фа	F
Соль	G
Ля	A
Си	H
Си бемоль	B

Приложение 3. Пьер Булез



Приложение 4. Строка из произведения Оливье Мессиана



Приложение 5. Произведение, сочинённое с помощью матриц Булеза

Авторское произведение №1

Матрица Булеза

нет текста

Садриева Элиза



Приложение 6. Произведение, сочинённое с помощью моих матриц

Авторское произведение

Садриева Элиза, мои матрицы



Приложение 7. Произведение, сочинённое с помощью квадрата Меркурия.



Приложение 8. Произведения, сочинённые с помощью моего квадрата

Авторское произведение

Садриева Элиза

