

Всероссийская конференция для школьников и студентов
«Мой шаг в науку»

**Тема: «Математическое моделирование
экономических задач на оптимизацию»**

Секция: алгебра

Выполнил: Злобина Ксения,
ученик 10Б класс, МАОУ
«ХСОШ №1 им. Д.Ж.Жанаева»
Руководитель: С.Г.Садовская,
учитель математики МАОУ
«ХСОШ №1 им. Д.Ж.Жанаева»

2023 год

Оглавление

Введение	3
Основная часть	
1.1. Задачи на оптимизацию	4
1.2. Исследование линейной функции	4
1.3. Логическое рассуждение	5
1.4. Исследование квадратичной функции	6
Практическая часть	
2.1. Результаты анкетирования	7
2.2. Задача о витамине С	8
Заключение	10
Список литературы	11
Приложение	12

Введение

Российский математик 19 века П. Л. Чебышев говорил, что «особую важность имеют те методы науки, которые позволяют решать задачу, общую для всей практической деятельности человека – как располагать своими средствами для достижения наибольшей выгоды».

Большую часть своих сил каждый из нас тратит на поиск наилучшего или другими словами оптимального решения поставленной задачи. Мы ежедневно отвечаем на непростые вопросы, как при наименьших затратах, достичь наилучших результатов – высокого жизненного уровня, максимальной прибыли, минимальных затрат времени. Именно этот фактор определяет **актуальность** моей работы. В современном обществе умение моделировать различные жизненные, экономические и производственные ситуации стало особенно важно.

Представителям самых разных специальностей приходится постоянно решать задачи по выбору оптимального условия: инженеры-технологи стараются так организовать производство, чтобы выпускалось как можно больше продукции; конструкторы пытаются разработать прибор для космического корабля так, чтобы масса прибора была наименьшей; экономисты стараются спланировать связи завода с источниками сырья так, чтобы транспортные расходы оказались минимальными, и т. д. Задачи подобного рода носят общее название — задачи на оптимизацию (от латинского слова optimum— «наилучший»).

Целью моей работы является найти наиболее рациональные способы решения задач на оптимизацию.

Я поставила перед собой следующие **задачи**:

1. Изучить литературу и материалы по заданной теме.
2. Рассмотреть различные способы решения задач на оптимизацию.
3. Познакомить учащихся моего класса с методами решения задач такого типа.
4. Смоделировать задачу на оптимизацию для своей выгоды.

В процессе изучения теоретического материала у меня возникла **гипотеза**, что для решения задач на оптимизацию можно использовать знания, полученные в 7-9 классах школы.

Объект исследования: задачи на оптимизацию.

Предмет исследования: способы решения задач на оптимизацию.

Методы исследования: систематизация теоретического материала, обобщение накопленного материала, анализ методов решения задач оптимизации, математические методы обработки результатов исследования, табличная и графическая интерпретация данных, математические расчеты с использованием методов решения задач оптимизации.

Я выбрала эту тему не случайно. Задачи на оптимизацию встречаются в ЕГЭ и вызывают затруднения у учащихся. Я решила подробно изучить эту тему для того, чтобы как следует подготовиться к экзамену и помочь понять эти задачи моим одноклассникам.

Основная часть

1.1. Механизм решения задач на оптимизацию

Большинство старшеклассников знают, что на экзамене по математике есть задача с экономическим содержанием. Они связаны со знанием некоторых специфических математических моделей из области экономики, умением переводить сформулированные в виде текста условия в уравнения и неравенства и пониманием того, как решения полученных уравнений и неравенств соотносятся с тем, что написано в условии задачи.

К наиболее сложным задачам с экономическим содержанием относятся так называемые «задачи на оптимизацию» или экстремальные задачи. Эти задачи описывают разнообразные ситуации, с которыми граждане, предприятия и компании могут встретиться в своей экономической деятельности. Математикам удалось разработать методы решения задач на наибольшее и наименьшее значение, или, как их еще называют, задач на оптимизацию.

Для решения таких задач вводится **целевая функция**, экстремальное (наибольшее или наименьшее) значение которой надо найти. Это может быть прибыль, объем выпуска или реализации, затраты производства, издержки обращения, уровень обслуживания или дефицитности, число комплектов, отходы и т. д. Кроме функции задаются математические ограничения, которые выражаются в виде уравнений и неравенств. Их совокупность образует область допустимых решений (область экономических возможностей). План, удовлетворяющий системе ограничений задачи, называется допустимым. Допустимый план, доставляющий функции цели экстремальное значение, называется оптимальным.

Для решения таких задач наиболее часто используются:

- метод перебора вариантов;
- логических рассуждений;
- исследование функций элементарными методами;
- исследование функций с помощью производной.

В своей работе я остановлюсь на некоторых из данных способов.

1.2. Исследование линейной функции

Задача 1. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 21 квадратных метров и номера «люкс» площадью 49 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 1099 квадратных метр. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 рублей в сутки, а номер «люкс» — 4500 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель?

Решение:

Вид номера	Площадь 1 номера	Кол-во номеров	Площадь всех номеров	Стоимость номера в сутки	Стоимость всех номеров в сутки
Стандарт	21	x	21x	2000	2000x
Люкс	49	y	49y	4500	4500y
Всего			$21x + 49y = 1099$		$2000x + 4500y$

Целевая функция $f = 2000x + 4500y$ показывает прибыль отеля за сутки, требуется найти её наибольшее значение. Математические ограничения: $21x + 49y = 1099$ (1), $x \geq 0, y \geq 0$, x и y – целые числа.

Из равенства (1) следует $y = \frac{1099-21x}{49} = \frac{157-3x}{7}$. Заметим, что x принимает значения от 0 до $\frac{157}{3}$. Подставим значение y в целевую функцию $f = 2000x + \frac{157-3x}{7} \cdot 4500$,

$f = \frac{14000x + 706500 - 13500x}{7}$, $f = \frac{500x - 706500}{7}$. Это возрастающая линейная функция, поэтому наибольшее значение принимает при наибольшем значении x . Учитывая, что x – целое число, $x = 50$, $f(50) = \frac{500 \cdot 50 + 706500}{7} = 104500$.

Итак, наибольшую сумму 104500 рублей предприниматель получит, если в отеле будет 50 стандартных номеров и 1 номер «люкс».

1.3. Логическое рассуждение

Задача 2. У фермера есть два поля, каждое площадью 10 га. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором – 200 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 200 ц/га, а на втором – 300 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 10 000 р/ц, а свёклу – по цене 13 000 р/ц. Какой наибольший доход может получить фермер?

Решение:

	I поле, урожайность	II поле, урожайность	Цена
Картофель	300 ц/га	200 ц/га	10 000 р/ц
Свекла	200 ц/га	300 ц/га	13 000 р/ц

На втором поле урожайность свёклы выше, чем у картофеля, её цена выше, поэтому выгодней засеять второе поле свёклой. Выручка от продажи составит $300 \times 10 \times 13000 = 39000000$ рублей.

На первом поле урожайность картофеля выше, но его стоимость ниже. Относительная урожайность картофеля равна $\frac{300}{200} = \frac{3}{2}$, относительная цена - $\frac{10000}{13000} = \frac{10}{13}$. При умножении

получим: $\frac{3}{2} \cdot \frac{10}{13} = \frac{15}{13} > 1$, значит, на этом поле выгодней посадить картофель. Выручка от продажи составит $300 \times 10 \times 10000 = 30000000$ рублей.

Итак, фермер получит наибольший доход $30000000 + 39000000 = 69000000$ рублей.

Эту задачу можно решить как и предыдущую, с помощью введения линейной функции.

I поле	Площадь	Урожай	Доход
Картофель	х га	300х ц	$300х \times 10$ тыс. руб. = 3000х тыс. руб.
Свекла	10 – х га	200(10-х) ц	$200(10-х) \times 13 = 26000 - 2600х$ тыс. руб.
Всего	10		$3000х + 26000 - 2600х = 400х + 26000$ тыс. руб.

I поле	Площадь	Урожай	Доход
Картофель	у га	200у ц	$200у \times 10$ тыс. руб. = 2000у тыс. руб.
Свекла	10 – у га	300(10-у) ц	$300(10-у) \times 13 = 39000 - 3900у$ тыс. руб.
Всего	10		$2000у + 39000 - 3900у = 39000 - 1900у$ тыс. руб.

Общий доход составит $400х + 26000 + 39000 - 1900у = 100(4х - 19у + 650)$ тыс. руб. Рассмотрим целевую функцию $f(x,y) = 100(4х - 19у + 650)$, где $х \in [0; 10]$, $у \in [0; 10]$. Это квадрат со стороной 10. Целевая функция – это множество прямых, параллельных прямой $у = \frac{4}{19}х$, некоторые из которых проходят через точки указанного квадрата, а некоторые – нет. Рассмотрим две угловые «крайние» точки (0;10) и (10;0), подставляя координаты этих точек, найдём наибольшее значение $f(10,0) = 69000$ тыс. руб.

1.4. Исследование квадратичной функции

Задача 3. Производство х тыс. единиц продукции обходится в $q = 0,5х^2 + х + 7$ млн. рублей в год. При цене р тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн. рублей) составляет $рх - q$. При каком наименьшем значении р через три года суммарная прибыль составит не менее 75 млн рублей?

Решение: Прибыль (в млн. рублей) за один год выражается величиной $рх - q = рх - (0,5х^2 + х + 7) = рх - 0,5х^2 - х - 7 = -0,5х^2 + (р - 1)х - 7$. Получили целевую функцию $f = -0,5х^2 + (р - 1)х - 7$ – это квадратичная функция, графиком которой является парабола, ветви которой направлены вниз, достигает своего наибольшего значения в вершине

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{p-1}{2 \cdot (-0.5)} = p - 1.$$

Найдём значение целевой функции при $х = p - 1$:

$$f = -0,5(p - 1)^2 + (p - 1)(p - 1) - 7$$

$$f = -0,5(p - 1)^2 + (p - 1)^2 - 7$$

$$f = 0,5(p - 1)^2 - 7$$

Прибыль за 3 года составит не менее 75 млн. рублей, а за один год не менее 25 млн. рублей, если $0,5(p - 1)^2 - 7 \geq 25$,

$$P^2 - 2p + 1 - 14 - 50 \geq 0$$

$$P^2 - 2p - 63 \geq 0,$$

$$p \leq -7 \text{ или } p \geq 9$$

Поскольку цена продукции не может быть отрицательной, то условию задачи удовлетворяет $p \geq 9$.

Таким образом, искомая наименьшая цена составляет 9 тыс. руб.

Практическая часть

2.1. Результаты анкетирования

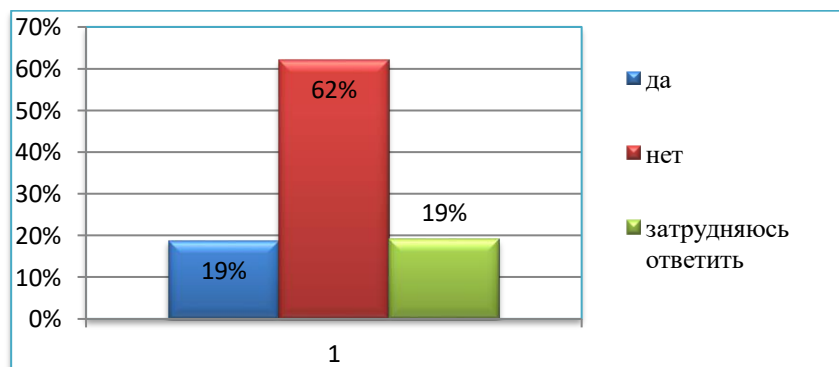
Изучив статистику выполнения задания №15 (а в прошлом году это задание №17) по Республике Бурятия, своё исследование я решила начать с анкетирования учащихся 10-11, планирующих сдавать ЕГЭ по математике профильного уровня (16 человек: 10 класс – 6, 11 класс – 10).

Номер задания в КИМ ЕГЭ	Уровень сложности задания	Процент выполнения задания в субъекте Российской Федерации				
		средний	в группе не преодолевших минимальный балл	в группе от минимального до 60 т.б.	в группе от 61 до 80 т.б.	в группе от 81 до 100 т.б.
17	повышенный	12,84	0,00	0,69	35,20	94,00

Результаты таковы:

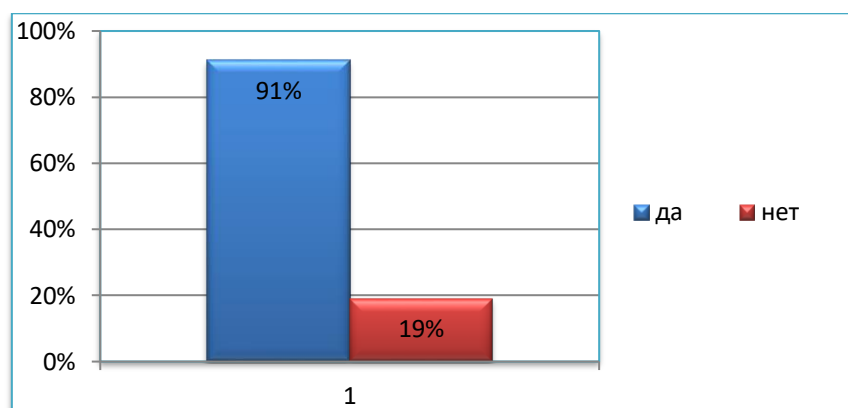
1. Планируете ли вы, при сдаче ЕГЭ по математике профильного уровня выполнять задание №15?

Да - 3, нет – 10, затрудняюсь ответить - 3.



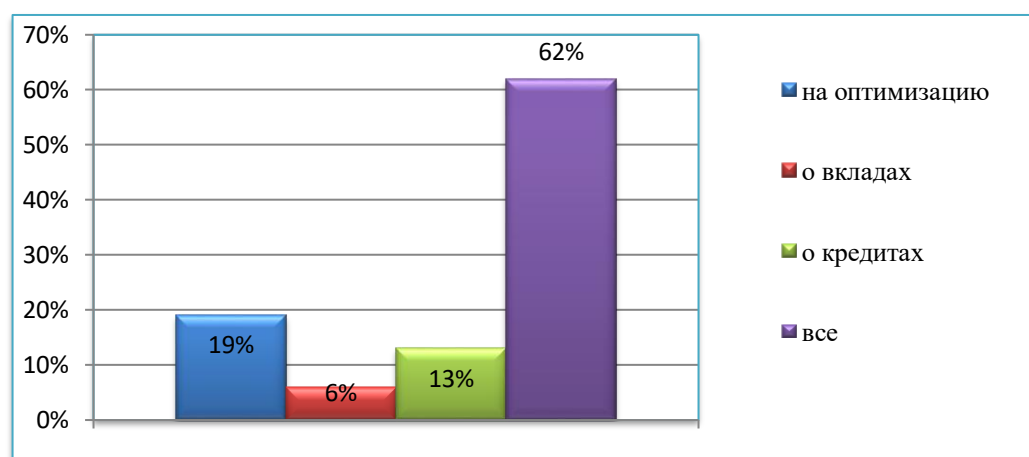
2. Считаете ли вы что современному человеку необходимо уметь решать задачи данного типа?

Да – 13, нет – 3.



3. Какие из перечисленных задач вызывают у вас большее затруднение: а) на оптимизацию б) о вкладах; в) о кредитах; г) все.

А -3 , Б -1 , В -2 , Г - 10 .



Отношение учащихся к решению данного задания неоднозначно. Большинство из них не умеют решать данные задачи. Данные диаграммы ещё раз свидетельствуют о необходимости более детального рассмотрения задания № 15.

2.2. Задача о витамине С

Изучение задач на оптимизацию вдохновило меня сочинить задачу для пользы своему организму и для финансовой выгоды.

Задача. Известно, что 1кг апельсинов содержит 150мг витамина С, а 1кг яблок - 75 мг витамина С. Сколько апельсинов и сколько яблок следует включить в дневной рацион, чтобы при минимальных затратах в нем оказалось 75 мг витамина С, не менее 0,25кг апельсинов и не менее 0,25кг яблок, если 1кг апельсинов стоит 180р., а 1кг яблок – 120р.?

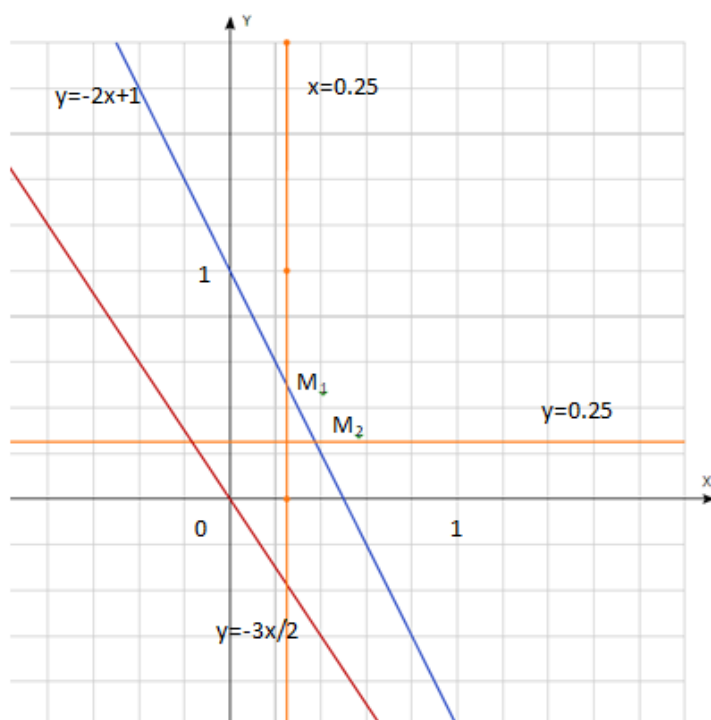
Занесем данные в таблицу:

Фрукты	Дневной рацион	Содержание витамина С (в 1кг)	Стоимость 1кг
апельсины	x кг	150мг	180р.
яблоки	y кг	75мг	120р.

Ограничения имеют вид:

$$x \geq 0,25; \quad y \geq 0,25; \quad 150x + 75y = 75, \quad 2x + y = 1, \quad y = -2x + 1.$$

Целевая функция: $f(x, y) = 180x + 120y$. Необходимо найти такие x и y , при которых целевая функция принимает минимальное значение. Построим область допустимых решений задачи. Пусть $180x + 120y = 0$; отсюда $y = -3x/2$. Построим график функции $y = -3x/2$ и будем осуществлять параллельный перенос его вдоль оси ОУ вверх, т.е. это равносильно увеличению значений выражения $180x + 120y$.



Чтобы целевая функция принимала минимальное значение, ее график должен пересечь отрезок M_1M_2 в точке M_2 . Она является точкой пересечения прямых $x = 0,25$ и $y = -2x + 1$.

Получим: $-2x + 1 = 0,25, \quad x = 0,375$

Далее находим: $f(x, y) = 180 \cdot 0,375 + 120 \cdot 0,25 = 67,5 + 30 = 97,5$ рублей.

Итак, чтобы дневной рацион содержал 75мг витамина С и чтобы затраты при этом были минимальные, человеку необходимо ежедневно съедать 0,375 кг апельсинов и 0,25 кг яблок.

Заключение

Проводя исследование, я доказала, что многие задачи на оптимизацию, встречающиеся в литературе по подготовке к экзаменам можно решить, используя знания о линейных функциях, квадратичных функциях, умение решать уравнения и неравенства. При разборе задач на оптимизацию, я выработала конкретный алгоритм, который позволяет «перевести» любую реальную ситуацию на математический язык, построить её модель, проанализировать, применив в ходе анализа имеющиеся знания, умения, навыки и решив математически сформулированную задачу дать ответ на поставленный вопрос. Я доказала, что математика становится живым инструментом поисков оптимальных решений в организации производства, инновационных открытий, повышения производительности труда, а значит, служит положительной динамике развития страны и экономики в целом.

Задачи на оптимизацию – это уже настоящие исследовательские задачи, очень близкие по смыслу (но не по методам решения) к задачам с параметром. Сложность таких задач в том, что не всегда есть готовые методы решения и задача может потребовать своего подхода. Успех в решении таких задач заключается в систематическом тренинге.

Думаю, что в дальнейшем рассмотрю другие, более сложные задачи на оптимизацию.

Список литературы

1. Гушин Д. Д. Встречи с финансовой математикой. – Санкт-Петербург, 2016. – 34 с.
2. Гушин Д. Д. Образовательный портал «РЕШУ ЕГЭ: математика»: <http://ege.sdamgia.ru>.
3. Козырев В. М. Основы современной экономики. – М.: Финансы и статистика, 2007. – 544 с.
4. Фёдорова В. П. Методический подход к решению задач №17 ЕГЭ по математике: <https://4ege.ru/matematika/53007-metodicheskiy-podhod-k-resheniyu-zadach-17-ege-po-matematike.html>
5. Экономические задачи: учебно-методическое пособие / сост. В.А. Молчанов. – Саратов: ГАУ ДПО «СОИРО», 2017. – 44 с.
6. Ященко И. В. и др. ЕГЭ 2020. Математика: 50 вариантов типовых тестовых заданий. – М.: Экзамен, 2019. – 247 с.

Алгоритм решения задач на оптимизацию

Первый этап. Составление математической модели.

1) Проанализировав условия задачи, выделите оптимизируемую величину, т.е. величину, о наибольшем или наименьшем значении которой идет речь. Обозначьте ее как y (или S, V, R, t — в зависимости от характера величины).

2) Одну из участвующих в задаче неизвестных величин, через которую можно выразить оптимизируемую величину, примите за независимую переменную, и обозначьте ее как x (или какой-либо иной буквой).

Установите ограничения для независимой переменной (в соответствии с условиями задачи), т. е. область определения для искомой оптимизируемой величины.

3) Исходя из условий задачи, определите функциональную зависимость величин, выразите y через x . Математическая модель задачи представляет собой функцию $y = f(x)$ с областью определения X , которую нашли на втором шаге.

Второй этап. Изучение математической модели.

На этом этапе для функции $y = f(x)$, $x \in X$ найдите экстремальные значения функции, в заданных условиях.

Если в процессе формализации была выявлена линейная зависимость, то функция будет принимать экстремальные значения на концах отрезка. В случае возрастающей функции — на правом конце, убывающей — на левом конце отрезка.

В случае зависимости вида функция приобретает экстремальное значение в точке, которая является вершиной параболы. При значении коэффициента $a > 0$ вершина является точкой минимума, при $a < 0$ — точкой максимума. В том случае, если вершина не попадает в заданный промежуток, экстремальные значения будут находиться на его концах, как и у линейной функции.

Третий этап. Формулировка ответа задачи.