

Открытый урок по теме «Основы тригонометрии»

Группа: 5 (1 курс)

Цель урока: Сформировать умение находить координаты точек на числовой окружности и использовать модель числовой окружности для решения базовых задач.

Задачи:

- Образовательные: Ввести модель числовой окружности на координатной плоскости. Научить находить декартовы координаты точек, соответствующих основным углам (кратным $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$). Сформировать навык перехода от геометрической модели к аналитической.
- Развивающие: Развивать логическое, пространственное и функциональное мышление. Развивать умение работать с математическими моделями.
- Воспитательные: Воспитывать аккуратность, точность построений, умение слушать и аргументированно излагать свою точку зрения.

Тип урока: Урок изучения и первичного закрепления новых знаний.

Оборудование: Интерактивная доска, раздаточный материал («чистая» единичная окружность в системе координат), маркеры, линейки.

Ход урока (45 минут)

1. Организационный момент (2 минуты)

Приветствие, настрой на работу.

Мотивационная «зацепка»: «Мы научились отмечать на окружности точку, соответствующую углу в радианах. Но математика любит точность. Как однозначно описать положение этой точки? Достаточно ли одного числа (угла)?» (Нет, нужно два числа – координаты).

Объявление темы и цели: «Сегодня мы превратим нашу тригонометрическую окружность в полноценную числовую окружность на координатной плоскости и научимся находить координаты любой её точки».

2. Актуализация опорных знаний (7 минут)

Фронтальный опрос с визуализацией на доске:

1. Что такое единичная окружность? (Центр в $O(0;0)$, $R=1$).
2. Как связаны градусы и радианы? (π рад = 180°). Быстрый устный перевод: $\frac{\pi}{2} \rightarrow 90^\circ$, $\pi \rightarrow 180^\circ$, $2\pi \rightarrow 360^\circ$.
3. Назовите и покажите на воображаемой окружности точки, соответствующие углам 0 , $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3\pi}{2}$. Каковы их приблизительные координаты?

Учитель фиксирует на доске: $0(1; 0)$, $\frac{\pi}{2}(0; 1)$, $\pi(-1; 0)$, $\frac{3\pi}{2}(0; -1)$, $2\pi(1; 0)$.

4. Вспомним, как связаны стороны в прямоугольном треугольнике с углом 30° ($\frac{\pi}{6}$) и 45° ($\frac{\pi}{4}$)? (Катет против угла 30° равен половине гипотенузы; в равнобедренном прямоугольном треугольнике катеты равны, гипотенуза в $\sqrt{2}$ раз больше).

Вывод: Мы уже знаем координаты четырёх точек. Чтобы найти координаты других, нам понадобится геометрия.

3. Объяснение нового материала (15 минут)

Этап 1: От угла к координатам (на примере точки $M(\frac{\pi}{4})$).

Учитель рисует на доске систему координат и единичную окружность.

Отмечает точку M , соответствующую углу $\frac{\pi}{4}$ (45°).

Опускает перпендикуляры из точки M на оси OX и OY . Получается прямоугольный треугольник OMP (P – проекция на OX).

Вопрос: «Чему равен угол MOP ?» ($\frac{\pi}{4}$).. «Что можно сказать о треугольнике OMP ?»

(Он равнобедренный, $\angle OMP = \frac{\pi}{4}$).

Обозначаем: $OP = MP = x$. Гипотенуза $OM = 1$ (радиус!).

По теореме Пифагора: $x^2 + x^2 = 1^2 \rightarrow 2x^2 = 1 \rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Вывод: Точка $M(\frac{\pi}{4})$ имеет координаты $(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Аналогично разбирается точка для $(\frac{\pi}{6})$ (30°):

Катет против угла 30° равен половине гипотенузы. Гипотенуза $OM=1$. Значит, MP (против угла 30°) $= \frac{1}{2}$. Это ордината y .

По теореме Пифагора: $OP^2 = 1^2 - (\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$. $OP = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Это абсцисса x .

Итог: $M(\frac{\pi}{6}) \rightarrow (\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2})$.

Этап 2: Симметрия – наш главный помощник.

Учитель отмечает найденные точки и предлагает найти координаты точек во второй, третьей и четвертой четвертях, симметричных данным.

Пример для $\frac{\pi}{3}$ (60°): «Координаты точки $\frac{\pi}{3}$ – это "перевернутые" координаты точки $\pi/6$ ». Проводим аналогичные рассуждения или используем симметрию: $M\left(\frac{\pi}{3}\right) \rightarrow \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Правило знаков: Учитель акцентирует внимание: в I четверти $(0; \pi/2) - (+, +)$; II $(\pi/2; \pi) - (-, +)$; III $(\pi; 3\pi/2) - (-, -)$; IV $(3\pi/2; 2\pi) - (+, -)$.

Этап 3: Итог – таблица основных точек (5 минут).

Учитель вместе с классом заполняет на доске (или открывает заранее подготовленную) таблицу-опору. Важно не просто дать таблицу, а вывести её.

Угол t (рад)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Координаты (x;y)	(1; 0)	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	(0; 1)	$\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$	(-1; 0)

Делается вывод о периодичности: точке t и точке $t + 2\pi k$ соответствует одна и та же точка на окружности.

4. Первичное закрепление (15 минут)

Работа в группах по 2-3 человека с раздаточным материалом (чистые бланки с окружностями).

Задание 1 (Найди координаты):

На единичной окружности отметьте точки, соответствующие заданным числам, и определите их координаты:

1. $7\pi/6$ (Симметрия с $\pi/6$ относительно начала координат: $(-\sqrt{3}/2; -1/2)$)
2. $5\pi/4$ (Симметрия с $\pi/4$: $(-\sqrt{2}/2; -\sqrt{2}/2)$)
3. $4\pi/3$ (Симметрия с $\pi/3$: $(-1/2; -\sqrt{3}/2)$)
4. $11\pi/6$ (Симметрия с $\pi/6$ относительно оси OX: $(\sqrt{3}/2; -1/2)$)

Задание 2 (Обратная задача – найди угол):

Для точки на единичной окружности с координатами найдите одно из соответствующих ей чисел t:

1. (0; -1) ($t = 3\pi/2 + 2\pi k$)
2. $(-\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2)$ ($t = 3\pi/4 + 2\pi k$)

3. $(1/2; -\sqrt{3}/2)$ ($t = 11\pi/6 + 2\pi k$) – здесь важно обсудить знаки: $x > 0$, $y < 0$ – IV четверть.

Интерактивный момент: Учитель вызывает к доске 2-3 учеников для выполнения заданий, остальные работают в тетрадях. Обсуждение результатов, исправление ошибок.

5. Рефлексия и подведение итогов (4 минуты)

Что нового мы сегодня построили? (Модель числовой окружности на плоскости).

Как найти координаты точки, если известен угол t ? (Опустить перпендикуляры, использовать определение синуса и косинуса – можно дать анонс следующей темы: $x = \cos t$, $y = \sin t$).

Как решить обратную задачу? (По знакам координат определить четверть, по модулю координат найти опорный угол (например, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$)).

Где это может пригодиться? (Это основа для изучения функций синус и косинус, для описания колебаний, вращений).

6. Домашнее задание (2 минуты с комментариями)

1. Базовый уровень: Выучить координаты точек, кратных $\pi/6$ и $\pi/4$. Решить задачи из учебника на нахождение координат точек для заданных t и нахождение t для заданных координат.

2. Повышенный уровень:

Составить и решить 2-3 свои задачи на нахождение координат точек, не входящих в таблицу (например, $-\pi/3$, $13\pi/4$).

Проблемная задача: «Точка движется по числовой окружности из положения $P(1;0)$. В какую сторону она должна двигаться и какой путь пройти, чтобы попасть в точку с координатами $(-1/2; \sqrt{3}/2)$? Укажите все возможные варианты.»

Методические рекомендации:

Весь урок должен быть насыщен визуализацией. Каждое утверждение подкрепляется рисунком.

Симметрия – ключевой метод, который нужно активно продвигать, он экономит время и развивает мышление.

На этапе закрепления важно чередовать прямую и обратную задачи.

В конце урока можно кратко намекнуть, что $x = \cos t$, $y = \sin t$, чтобы создать интригу для следующего урока.