

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ МОСКОВСКОЙ ОБЛАСТИ
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
Московской области «Красногорский колледж»
(ГБПОУ МО «Красногорский колледж»)

Индивидуальная проектная работа по математике на тему:
СПОСОБЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ ПИФАГОРА

Специальность:

Финансы

Студент группы №18ФД

Антонян Арсине Арсеновна

Преподаватель по математике:

Ускова Светлана Владимировна

г.Красногорск, 2025

Содержание

Введение.....	3
Глава 1. Теоретическая часть	4
1.1. История теоремы Пифагора	4
1.2. Основные способы доказательства теоремы Пифагора	6
1.2.1. Геометрическое доказательство.....	8
1.2.2. Доказательство через подобие треугольников.....	9
1.2.3. Доказательство методом перестановки площадей.....	10
Глава 2. Практическая часть	12
Заключение	14
Список литературы и информационных ресурсов	15

Введение

Теорема Пифагора – одна из самых узнаваемых формул школьной геометрии, однако за ней скрывается удивительный математический сюжет. На протяжении веков математики находили всё новые и новые доказательства этой теоремы, и сегодня их насчитывают несколько сотен, что делает её одной из теорем с наибольшим количеством известных доказательств. Возникает вопрос: зачем нужно столько разных путей к одному и тому же результату и что они позволяют понять о самой теореме?

Актуальность темы заключается в том, что теорема Пифагора не ограничивается рамками учебника: её используют при строительстве зданий и дорог, в навигации, картографии, физике и даже компьютерной графике, когда нужно находить расстояния и диагонали. Понимание различных способов её доказательства развивает логическое мышление, умение сравнивать подходы и видеть связи между алгеброй и геометрией.

Цель проекта – изучить и сравнить несколько геометрических и алгебраических способов доказательства теоремы Пифагора и показать их применение при практических задачах.

Задачи проекта:

1. Изучить историю возникновения теоремы Пифагора и её роли в математике.
2. Рассмотреть и описать несколько разных способов доказательства теоремы Пифагора.
3. Решить задачи, в которых используются теорема Пифагора.
4. Показать примеры применения теоремы Пифагора в реальной жизни.

Глава 1. Теоретическая часть

1.1. История теоремы Пифагора

Теорема Пифагора является одной из самых известных и фундаментальных теорем геометрии. Её формулировка знакома каждому школьнику, однако история появления этого утверждения гораздо глубже и связана с развитием математики в разных цивилизациях.

Задолго до Пифагора соотношение между сторонами прямоугольного треугольника было известно в Древнем Вавилоне. На клинописных табличках встречаются так называемые «пифагоровы тройки» – наборы целых чисел, удовлетворяющих равенству $a^2 + b^2 = c^2$ их использовали для практических вычислений при строительстве и землемерии. Похожие знания существовали и в Древнем Египте, где землемеры применяли верёвки с узлами в пропорции 3–4–5, чтобы строить прямые углы при разбивке участков и возведении храмов.

В Древней Индии соотношение сторон прямоугольного треугольника описано в «Шульба-сутрах» – текстах о строительстве ритуальных алтарей. В них формулируются правила, по смыслу эквивалентные теореме Пифагора, что показывает, что идея этой зависимости была известна в различных культурах независимо друг от друга.

Имя Пифагора Самосского, жившего в VI веке до н. э., связано с первым строгим математическим доказательством данного утверждения. Школа Пифагора придавала большое значение логическим обоснованиям, поэтому теорема заняла важное место в их учении, хотя точный вид первоначального доказательства до нас не дошёл. Позднее теорема была включена в «Начала» Евклида, где приведено геометрическое доказательство на языке площадей фигур, построенных на сторонах прямоугольного треугольника.

В последующие века интерес к теореме Пифагора только возрастал. Математики стран Востока и Европы создавали всё новые доказательства, используя методы алгебры и геометрии, и к Новому времени было известно уже несколько десятков вариантов. В наше время число различных

доказательств превышает несколько сотен, что делает теорему Пифагора одной из теорем с наибольшим количеством известных обоснований.

В отечественной математической традиции теорема Пифагора занимает центральное место в школьном курсе геометрии. Российские учебники и методические пособия подробно излагают классические геометрические доказательства и предлагают большое количество задач прикладного характера, что подчёркивает её значение не только для теории, но и для практики. Благодаря этому теорема Пифагора остаётся важным инструментом при изучении физики, навигации, архитектуры, и других дисциплин, связанных с измерением расстояний и работой в прямоугольных координатах.

1.2. Основные способы доказательства теоремы Пифагора

За долгую историю математики было найдено множество различных доказательств теоремы Пифагора. Их объединяет один и тот же результат, но пути рассуждений сильно отличаются. Это показывает, что одну и ту же математическую идею можно объяснить по-разному, используя разные методы.

Одну большую группу составляют геометрические доказательства. В них используются построения на плоскости и сравнение площадей фигур. Классическим примером является доказательство, приписываемое Евклиду: на сторонах прямоугольного треугольника строятся квадраты, а затем показывается, что площадь квадрата на гипотенузе равна сумме площадей квадратов на катетах. Сюда же относятся многочисленные «доказывающие рисунки», где квадрат на гипотенузе разбивается на части и перекладывается в квадраты на катетах без использования формул.

Другая важная группа — доказательства через подобие треугольников. В этом подходе рассматривается прямоугольный треугольник и высота, опущенная к гипотенузе. Полученные треугольники оказываются подобными исходному и друг другу. Из равенства отношений сторон выводятся пропорции, которые приводят к равенству $a^2 + b^2 = c^2$. Такие доказательства демонстрируют связь теоремы Пифагора с понятием подобия и позволяют аккуратно вывести формулу без сложных построений.

С развитием алгебры появились алгебраические доказательства. В них рассматриваются составные фигуры (например, большой квадрат, составленный из четырёх одинаковых прямоугольных треугольников и одного маленького квадрата), вычисляется их площадь двумя разными способами, а затем полученные выражения приравниваются. После преобразований получается формула теоремы Пифагора. Подобный подход особенно удобен в

школьном курсе, потому что связывает геометрию с алгебраическими вычислениями.

Существуют и более необычные доказательства: с использованием координат и векторов, через свойства окружности, а также так называемые «доказательства без слов», где логика рассуждений понятна почти полностью по рисунку. В рамках данного проекта будут рассмотрены несколько представителей разных групп: одно геометрическое доказательство, одно доказательство через подобие треугольников и одно алгебраическое. Это позволит сравнить их между собой и увидеть, как разные математические методы приводят к одному и тому же результату.

1.2.1. Геометрическое доказательство

Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c . На каждой стороне построим квадрат: на катетах получаются квадраты площадью a^2 и b^2 , а на гипотенузе – квадрат площадью c^2 . Такое построение позволяет сравнивать площади фигур, связанных со сторонами треугольника.

Существует геометрическое доказательство теоремы Пифагора, основанное на разбиении и перекладывании фигур. Квадрат, построенный на гипотенузе, можно разбить на части и составить из них два квадрата, построенных на катетах. Поскольку при этом общая площадь не изменяется, площадь квадрата на гипотенузе равна сумме площадей квадратов на катетах, то есть выполняется равенство $a^2 + b^2 = c^2$.

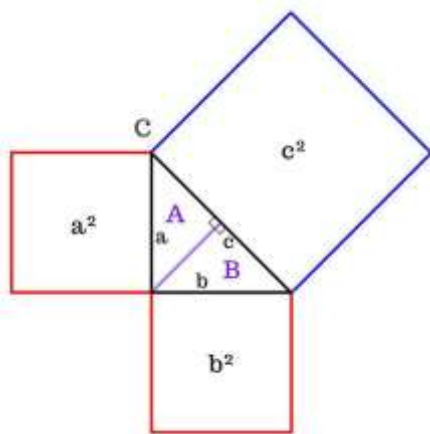


Рис. 1 – Геометрическое доказательство теоремы Пифагора.

1.2.2. Доказательство через подобие треугольников

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C . Опустим из вершины C высоту CH на гипотенузу AB . В результате гипотенуза делится на два отрезка $АН$ и $НВ$, а исходный треугольник разбивается на два меньших прямоугольных треугольника ACH и BCH .

Треугольники ABC , ACH и BCH подобны друг другу, так как у них есть по одному прямому углу и по одному общему острому углу. Из подобия треугольников ABC и ACH получаем пропорцию откуда следует равенство $AC^2 = AH \times AB$. Аналогично из подобия треугольников ABC и BCH имеем $\frac{BC}{AB} = \frac{CH}{BC}$, то есть $BC^2 = HB \times AB$.

Складывая полученные равенства, получаем

$$AC^2 + BC^2 = AH \times AB + HB \times AB = (AH + HB) \times AB = AB^2.$$

Так как $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$, то это равенства можно записать в виде $a^2 + b^2 = c^2$. Таким образом, с помощью подобия треугольников получено доказательство теоремы Пифагора.

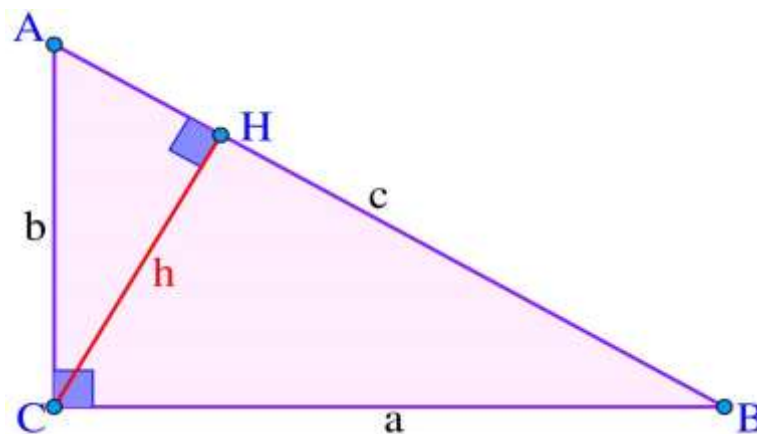


Рис. 2 – Доказательство теоремы Пифагора через подобие треугольников.

1.2.3. Доказательство методом перестановки площадей

Этот способ доказывает теорему Пифагора наглядно — через перекладывание фигур без изменения их площади.

Суть доказательства:

1. Берём квадрат, построенный на гипотенузе c , и 4 одинаковых прямоугольных треугольника с катетами a и b .

2. Этими треугольниками можно заполнить квадрат c^2 двумя разными способами:

- Первый способ (левый рисунок): треугольники уложены так, что между ними остаётся квадрат со стороной c .

- Второй способ (правый рисунок): те же треугольники переложены так, что между ними образуются два квадрата — со сторонами a и b .

3. Поскольку треугольники одни и те же, то площадь оставшейся части не меняется. Значит:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Как это видно на рисунках:

- На первом рисунке показано, как квадрат c^2 разбивается на 4 треугольника и внутренний квадрат.

- На втором рисунке те же 4 треугольника переставлены так, что теперь они образуют два меньших квадрата a^2 и b^2 .

Теорема Пифагора становится очевидной: площадь квадрата на гипотенузе равна сумме площадей квадратов на катетах, что наглядно видно при простой перестановке одинаковых треугольников.

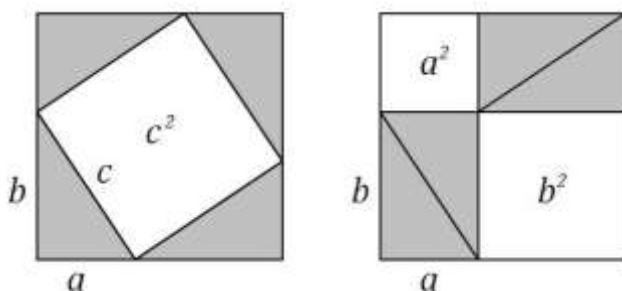


Рис. 3 – Доказательство методом перестановки площадей

Таким образом, были рассмотрены несколько различных способов доказательства теоремы Пифагора: геометрическое доказательство, доказательство через подобие треугольников и доказательство методом перестановки площадей. Они показывают, что одна и та же теорема может быть обоснована разными путями, но во всех случаях приводят к одному и тому же равенству $a^2 + b^2 = c^2$. Это позволяет перейти к практической части работы, где теорема Пифагора будет использована при решении задач и рассмотрении примеров из реальной жизни.

Глава 2. Практическая часть

Во второй части проекта рассматривается практическое применение теоремы Пифагора. Для этого выбрана реальная ситуация из повседневной жизни, в которой удобно использовать прямоугольный треугольник и диагональ для оценки расстояний. Один из таких примеров связан с дорогой от станции Павшино до колледжа, по которой автор проекта ходит каждый день.

По данным Яндекс Карт, от станции до колледжа можно дойти двумя пешеходными маршрутами. Короткий путь проходит через жилой комплекс и имеет длину примерно 900 м (около 9 минут ходьбы), а более длинный путь вдоль улиц — около 1000 м (примерно 11 минут). Сравним эти маршруты и покажем, как идея теоремы Пифагора помогает описать такую ситуацию.

Задача. От станции Павшино до колледжа можно дойти двумя пешеходными маршрутами. Первый маршрут проходит через жилой комплекс и занимает примерно 9 минут, его длина по карте около 900 м. Второй маршрут идёт вдоль основных улиц, занимает примерно 11 минут, его длина около 1000 м. Будем считать, что улицы образуют прямоугольник, а короткий путь через жилой комплекс является диагональю этого прямоугольника. Насколько путь по диагонали короче пути вдоль улиц? Можно ли считать, что в данной ситуации выполняется теорема Пифагора?

Решение. Пусть вдоль одной улицы нужно пройти a метров, а вдоль другой — b метров. Тогда длина длинного маршрута по улицам равна $a + b \approx 1000$ м, а длина короткого маршрута через жилой комплекс — $c \approx 900$ м. Путь по диагонали короче пути по двум улицам на $(a + b) - c = 1000 - 900 = 100$ м.

То есть, выбирая маршрут через жилой комплекс, пешеход экономит примерно 100 м пути. Если считать, что улицы образуют прямоугольник, а короткий путь — диагональ, то такая ситуация соответствует модели прямоугольного треугольника, в которой работает теорема Пифагора. На практике улицы могут быть не идеально прямыми, однако данный пример

показывает, как с помощью теоремы Пифагора можно оценивать и сравнивать реальные расстояния в городе.

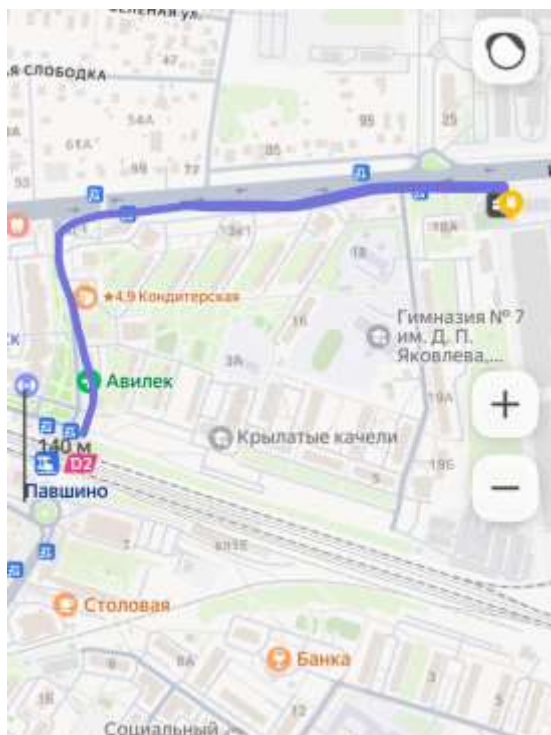


Рис. 4 – Длинный маршрут от станции Павшино до колледжа по улицам.



Рис. 5 – Короткий маршрут через жилой комплекс.

Заключение

В ходе выполнения проекта были рассмотрены история возникновения теоремы Пифагора, несколько её доказательств (геометрическое, через подобие треугольников и методом перестановки площадей), а также пример практического применения при сравнении двух реальных маршрутов от станции Павшино до колледжа. Анализ показал, что одна и та же теорема может иметь разные по форме, но равноправные доказательства, а формула $a^2 + b^2 = c^2$ удобно используется как в теоретических рассуждениях, так и при решении прикладных задач, связанных с измерением расстояний. Выполненная работа позволила углубить понимание теоремы Пифагора, увидеть связь между различными разделами математики и убедиться в её актуальности для описания ситуаций из повседневной жизни.

Список литературы и информационных ресурсов

1. Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф. и др. Геометрия. 7–9 классы: учебник для общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 2019.
2. <https://domznaniy.school/articles/teorema-pifagora>
3. <https://www.nkj.ru/archive/articles/29482/>
4. <https://kulturologia.ru/blogs/151023/57753/>
5. https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%9F%D0%B8%D1%84%D0%B0%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B0
6. <https://uroki.tutoronline.ru/online-urok/teorema-pifagora>
7. <https://skysmart.ru/articles/mathematic/teorema-pifagora-formula>
8. https://www.webmath.ru/poleznoe/formules_19_1.php?utm_source=perplexity
9. <https://share.google/a7JJ737taCLkWkmRR>
10. https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/0/0b/Podobnye_treugolniki_proof.svg/763px-Podobnye_treugolniki_proof.svg.png
11. <https://tgstat.ru/en/channel/@matematika224>
12. <https://apps.apple.com/app/id313877526>