

Тема «Дискретная случайная величина»

1. Понятие дискретной случайной величины и ее закон распределения
Случайное событие, связанное с некоторым опытом, является качественной характеристикой опыта. Количественной же характеристикой результата проведенного опыта является случайная величина, к рассмотрению которой мы приступаем.

Пример 1. Бросаются две правильные однородные монеты. Сколько из них выпадет гербом кверху? При подбрасывании двух монет пространство элементарных событий имеет вид $U = \{\text{ЦЦ}, \text{ЦГ}, \text{ГЦ}, \text{ГГ}\}$, где Ц — «цифра», Г — «герб». Первый символ показывает, как выпала первая монета, а второй — вторая монета. Например, ЦГ означает, что первая монета выпала цифрой кверху, а вторая — гербом. Так как монеты правильные и однородные, то можно считать, что все элементарные события пространства U равновероятны, и тогда вероятность p каждого из них равна $1/4$. Обозначим через X число монет, выпавших гербом кверху, и составим таблицу.

U	ЦЦ	ЦГ	ГЦ	ГГ
X	0	1	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Так как элементарным событиям ЦГ и ГЦ соответствует одно и то же значение величины X , равное 1, то можно полагать, что это значение величина X принимает с вероятностью $p = 1/4 + 1/4 = 2/4 = 1/2$. Таким образом, значения величины X —число монет, выпавших гербом кверху, соответствующие им вероятности можно записать в виде таблицы.

Итак, каждое значение величины X есть число, определяемое исходом опыта и зависящее от случая A .

X	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$



О п р 1. Случайной называется величина, которая в результате опыта принимает с определенной вероятностью то или иное значение, зависящее от исхода опыта. Случайные величины обозначают прописными буквами латинского алфавита: X, Y, Z и т. д., а их значения — соответствующими строчными буквами: x, y, z и т. д.;

О п р 2. Случайная величина называется дискретной, если множество ее значений конечно или счетно, т. е. множество ее значений представляет собой конечную последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n$ или бесконечную: последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$. Вероятность того, что случайная величина X примет значение x , обозначают $P(x)=P(X=x)$.

О п р 3. Соответствие между возможными значениями $x_1, x_2, \dots, x_n$ случайной величины X и их вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_n$ называется законом распределения случайной величины X .

Закон распределения случайной величины может быть представлен в виде таблицы



События $X=x_1, X=x_2, \dots, X=x_n$ образуют полную систему попарно несовместных событий, поэтому сумма их вероятностей равна единице, т.е. $p_1+p_2+\dots+p_n=1$.

Так, в нашем примере закон распределения случайной величины

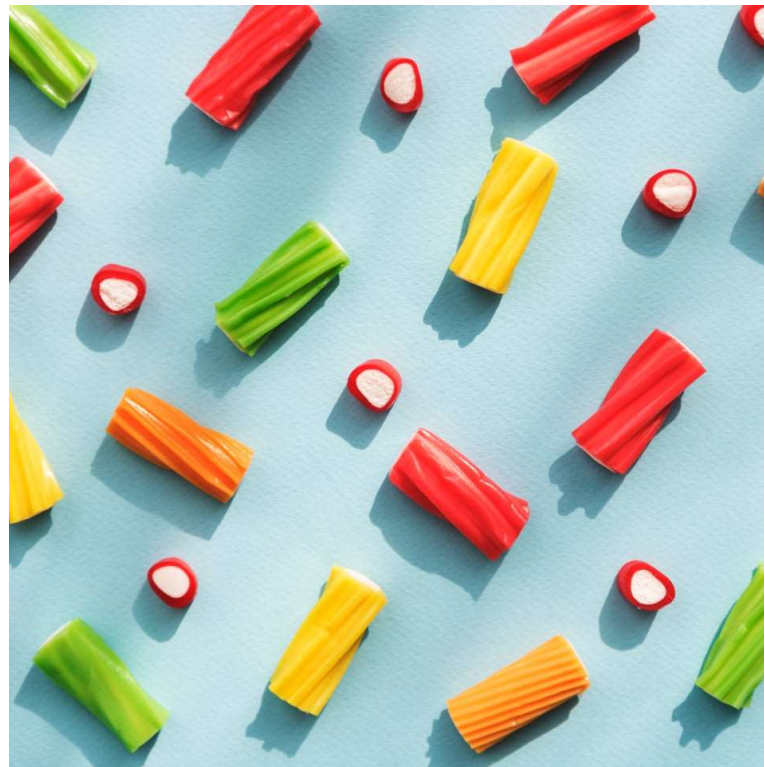
X — числа выпавших гербом кверху монет — может быть задан таблицей

X	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_i	...	p_n

Пример.

Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины X — числа очков, выпадающих при бросании правильной игральной кости, имеет вид, заданный таблицы

X	1	2	3	4	5	6
P	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$



2. Биномиальное распределение.

Пусть случайная величина X — число появлений события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события A равна p , а не появления — $q = 1 - p$.

Очевидно, что X может принимать значения $0, 1, 2, \dots, n$, вероятности которых определяются по формуле Бернулли:

$$P_n(m) = P(x) = P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, m=0, 1, 2, \dots, n$$

Такое название он получил в связи с тем, что вероятности (2) совпадают с соответствующими членами бинома

$$(p+q)^n = p^n + np^{n-1}q + \frac{n(n-1)}{2!}p^{n-2}q^2 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!}p^{n-m}q^m + \dots + q^n.$$



Пример 3.

Составить закон распределения числа попаданий в цель при четырех выстрелах, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,9.

Случайная величина X — число попаданий в цель при четырех выстрелах - может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4, а соответствующие им вероятности находим по формуле Бернулли.

Итак, искомый закон распределения имеет вид

$$P(X = 0) = C_4^0 * 0,9^0 * 0,1^4 = 0,0001;$$

$$P(X = 1) = C_4^1 * 0,9 * 0,1^3 = 0,0036;$$

$$P(X = 2) = C_4^2 * 0,9^2 * 0,1^2 = 0,0486;$$

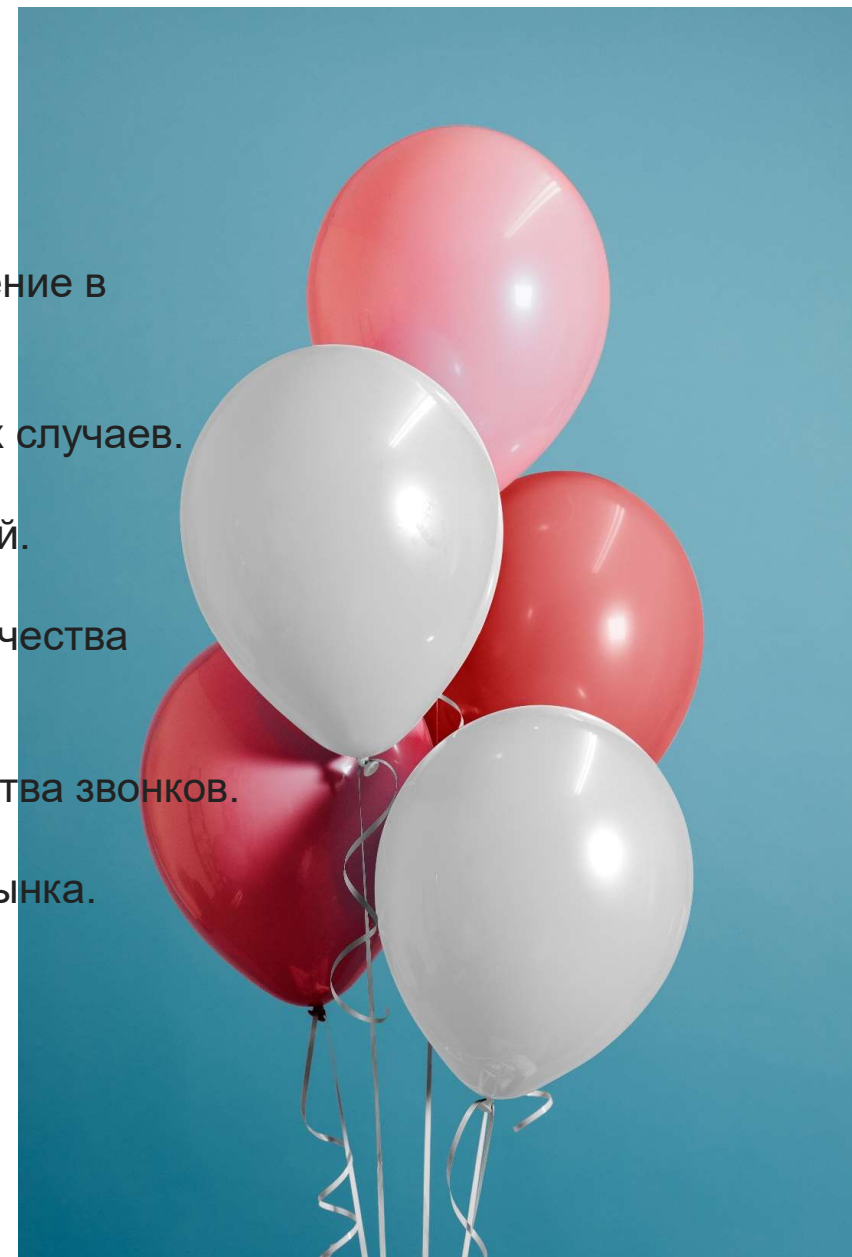
$$P(X = 3) = C_4^3 * 0,9^3 * 0,1 = 0,2916;$$

$$P(X = 4) = C_4^4 * 0,9^4 * 0,1^0 = 0,6561.$$

X	0	1	2	3	4
P	0,0001	0,0036	0,0486	0,2916	0,6561

Дискретные случайные величины находят широкое применение в различных областях:

- Страхование:** Оценка вероятности наступления страховых случаев.
- Финансы:** Моделирование рисков и доходности инвестиций.
- Производство:** Контроль качества продукции, оценка количества дефектных изделий.
- Телекоммуникации:** Анализ трафика сети, оценка количества звонков.
- Маркетинг:** Анализ результатов опросов и исследований рынка.
- Медицина:** Оценка эффективности лечения и диагностики.



Заключение

Сегодня мы познакомились с дискретными случайными величинами, их определением, способами представления закона распределения и основными числовыми характеристиками. Мы также рассмотрели примеры распространенных дискретных распределений и их применения в различных областях.

Понимание дискретных случайных величин является фундаментальным для анализа данных и принятия решений в условиях неопределенности. Дальнейшее изучение теории вероятностей и математической статистики позволит вам более глубоко понимать и применять эти концепции в своей профессиональной деятельности.